
Devoir surveillé n° 1
Corrigé

Exercice 1
Appliquons la méthode du pivot de Gauss, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée de l'identité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (1/5)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + (3/5)L_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3/5 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow (-1/5)L_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 0 & 4/5 \end{array}\right)$$

Cela montre que M est inversible et que

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1/5 & 1 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2
1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Cette égalité entre fonctions équivaut à dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \alpha(x^2-1) + \beta(x-1) + \gamma(x^2+x+1) = 0. \tag{1}$$

En choisissant $x = 1$, on obtient ainsi $3\gamma = 0$, d'où $\gamma = 0$. Par conséquent, la formule (1) se réécrit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \alpha(x^2-1) + \beta(x-1) = 0. \tag{2}$$

Choisir maintenant $x = -1$ donne $-2\beta = 0$, d'où $\beta = 0$. Ainsi, la formule (2) devient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \alpha(x^2-1) = 0. \tag{3}$$

En prenant finalement $x = 0$, on obtient $-\alpha = 0$. On a donc démontré que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui implique que

$$\boxed{\text{La famille } (f, g, h) \text{ est une famille libre.}}$$

2. La question revient à déterminer s'il existe ou non un triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ différent de $(0, 0, 0)$ et tel que

$$\lambda(1, 2, -1) + \mu(4, -7, 11) + \nu(2, -1, 3) = (0, 0, 0). \qquad (E)$$

Résolvons cette équation (E) :

$$(E) \iff \begin{cases} \lambda + \ \ 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda - \ \ 7\mu - \ \ \nu = 0 \\ -\lambda + 11\mu + 3\nu = 0 \end{cases} \underset{\substack{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 + E_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda + \ \ 4\mu + 2\nu = 0 \\ \quad - 15\mu - 5\nu = 0 \\ \quad\ \ 15\mu + 5\nu = 0 \end{cases} \underset{\text{car} \quad E_3 = -E_2}{\iff} \begin{cases} \lambda + \ \ 4\mu + 2\nu = 0 \\ \quad - 15\mu - 5\nu = 0 \end{cases}$$

On a donc

$$(E) \iff \begin{cases} \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ \quad 3\mu + \ \ \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \ \ = -\frac{2}{3}\nu \\ \mu = -\frac{\nu}{3} \end{cases}.$$

Ce système admet donc une solution $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$, comme par exemple $(-2, -1, 3)$, obtenue pour $\nu = 3$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La famille } \big((1, 2, -1), (4, -7, 11), (2, -1, 3)\big) \text{ est liée.}}$$

Exercice 3
1. Commençons par calculer J^2 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices I_3, J et J^2 sont donc chacune de la forme $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, puisqu'elles correspondent respectivement à $(a,b,c) = (1,0,0)$, $(a,b,c,) = (0,1,0)$ et $(a,b,c) = (0,0,1)$.

$$\boxed{\text{Les trois matrices } I_3,\ J,\ J^2 \text{ sont donc des éléments de } E.}$$

2. Pour montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on procède en trois temps :
— E est bien inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
— La matrice nulle est un élément de E, puisqu'elle correspond à $(a,b,c) = (0,0,0)$.
— Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ ainsi que $M, M' \in E$. Il existe donc des triplets de réels (a,b,c) et (a',b',c') tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & a' & c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda c + c' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda a + a' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est un élément de E, correspondant au triplet de réels $(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c')$.
Ainsi,

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).}$$

3. Pour montrer que la famille (I_3, J, J^2) est une base de E, commençons par remarquer que ses éléments sont des éléments de E. Montrons maintenant que la famille est libre et qu'elle engendre E.
— Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2 = 0$. Cette égalité s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Identifier les coefficients des membres de gauche et de droite donne immédiatement $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui montre que la famille (I_3, J, J^2) est libre.
— Par ailleurs, soit $M \in E$. Par définition de E, il existe trois réels a, b, c tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2.$$

Ainsi, M est combinaison linéaire de I_3, J et J^2. On a donc montré que la famille (I_3, J, J^2) est une famille génératrice de E.
En conclusion,

$$\boxed{\text{La famille } (I_3, J, J^2) \text{ est une base de } E.}$$

Exercice 4

1. Sachant qu'on a $A+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on trouve ensuite

$$\boxed{(A+I_3)^3 = 0}$$

2. Comme on sait que $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A$, on peut utiliser la formule du binôme pour développer $(A+I_3)^3$. On obtient ainsi

$$(A+I_3)^3 = A^3 + 3A^2 \cdot I_3 + 3A \cdot I_3^2 + I_3^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3.$$

On a vu dans la question précédente que cette expression est égale à 0, de sorte que

$$A^3 + 3A^2 + 3A = -I_3,$$

et donc

$$(-A^2 - 3A - 3I_3) \cdot A = I_3.$$

La matrice A étant carrée, cette égalité montre que

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3.}$$

3. Soit $n \geqslant 2$. Posons $B = A + I_3$, de sorte que $A = B - I_3$. Comme les matrices B et $-I_3$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme, ce qui donne :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B^k.$$

Dans la question 1, on a montré que $B^3 = 0$, ce qui implique que $B^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$. Tous les termes de la somme précédente correspondant à des $k \geqslant 3$ sont donc nuls, et il reste

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B^k = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nB + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2 = (-1)^n \big(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \big).$$

Compte tenu de l'expression de B et du calcul de B^2 vus en question 1, il vient finalement

$$\boxed{A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1 & n \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$