Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices d'analyse n^o 6

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle
$$2y' + y = 0.$$
2. Résoudre sur $]0, \infty[$ l'équation différentielle
$$xy' + y = 0.$$
3. (a) Déterminer les nombres réels a et b tels que l'on ait
$$\frac{1-x}{1+x} = a + \frac{b}{x+1}.$$
   (b) Résoudre sur $]-1, \infty[$ l'équation différentielle
$$(x+1)y' + (x-1)y = 0.$$

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1.$$

1. Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E).
3. Quelle est la solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 1$?

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
3. $y' + y = xe^x - x$
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 1$ sur $\mathbf{R}$
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, \infty[$
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, \infty[$
4. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, \infty[$

Exercice 5. Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2},$$

$C \in \mathbf{R}$.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^4+1)y' - x^3 y = x^5 - x^3 + 2x + 1.$$

1. Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

Exercice 7. Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle (E)

$$4v' + v = 3e^{x/2} - 1$$

avec la condition initiale $v_0 = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $4v' + v = 0$.
2. Trouver une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbf{R}$.
4. Déterminer la solution particulière vérifiant $v(0) = 0$.

Exercice 8. Déterminer les fonctions $f = \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables et vérifiant, pour tous $s, t \in \mathbf{R}$,

$$f(s+t) = f(s)f(t).$$

Exercice 9. On se propose d'intégrer sur $]0, \infty[$ l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2.$$

1. Trouver une solution particulière y_0 de (E) sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Montrer que le changement de fonction $y(x) = y_0(x) - 1/z(x)$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle (E_1),
$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1.$$
3. Intégrer (E_1) sur $]0, \infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) sur $]0, \infty[$.