Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices d'analyse n° 5

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Exercice 1.

Déterminer les primitives suivantes :

$$1)\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad 2)\int \sin t\,\cos^5 t\,\mathrm{d}t \qquad 3)\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$4)\int t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t \qquad 5)\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{1-2t^3}}\,\mathrm{d}t \qquad 6)\int \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad 2)\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad 3)\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$4)\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t \qquad 5)\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad 6)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Déterminer les primitives suivantes :

$$1)\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1} \qquad 2)\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t \qquad 3)\int t\sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3. (Intégration par parties)

Déterminer les primitives suivantes :

$$1)\int t\ln t\,\mathrm{d}t \qquad 2)\int t\arctan t\,\mathrm{d}t \qquad 3)\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$4)\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad 5)\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t \qquad 6)\int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad 2)\int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t \qquad 3)\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t \qquad 4)\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4. (Changement de variable)

Déterminer les primitives suivantes :

$$1)\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \qquad 2)\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \qquad 3)\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \qquad 2)\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \qquad 3)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Exercice 5. (Trinôme réductible au dénominateur)

1. Ecrire $3t^2-9t+6$ sous la forme $3(t-a)(t-b)$.
2. Trouver deux réels α et β tels que $\dfrac{1}{3t^2-9t+6}=\dfrac{\alpha}{t-a}+\dfrac{\beta}{t-b}$.
3. Trouver les primitives $\displaystyle\int \frac{1}{3t^2-9t+6}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. (Trinôme irréductible au dénominateur)

1. Trouver les primitives de $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int \frac{2t+3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Trouver les primitives de $\displaystyle\int \frac{1}{4+(t-5)^2}\,\mathrm{d}t$ (On se ramènera au cas précédent).
3. Déterminer les primitives de $\displaystyle\int \frac{1}{3t^2+4t+22/9}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int \frac{50t+13}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. (En vrac)

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{(t^2-2t+3)^2}\,\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\cos t)^{1234}\sin t\,\mathrm{d}t$ 4) $\displaystyle\int_{-2}^0 t\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$ 6) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ 7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+2t+3}{t+1}\,\mathrm{d}t$ 8) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{t}{t^2-4t+5}\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t,\ n\in\mathbf{N}$ 10) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 11) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ 12) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8. Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan compris entre les courbes d'équations respectives $y=2x^2-2x+1$ et $y=x^3-3x+3$ dans un repère orthonormal $(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

Exercice 9. (Intégrales de Wallis [1])

On pose, pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt \qquad \text{et} \qquad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $I_n=J_n$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Trouver une relation liant I_{n+2} et I_n.
4. Montrer par récurrence que

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{n!\,\pi}{2^{n+1}(k!)^2} & \text{si } n=2k \text{ est pair,}\\ \dfrac{2^{n-1}(k!)^2}{n!} & \text{si } n=2k+1 \text{ est impair.}\end{cases}$$

5. En déduire la valeur de

$$\int_{-1}^1 (1+t)^n(t-1)^n\,dt \quad (n\in\mathbf{N}).$$

1. John Wallis (1616-1703). Mathématicien anglais. Inventeur du signe ∞.