

---

**Feuille d'exercices d'analyse n° 5**  
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

---

**Exercice 1.**

1. Résoudre sur  $\mathbf{R}$  l'équation différentielle

$$2y' + y = 0.$$

2. Résoudre sur  $]0, \infty[$  l'équation différentielle

$$xy' + y = 0.$$

3. (a) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que l'on ait

$$\frac{1-x}{1+x} = a + \frac{b}{x+1}.$$

- (b) Résoudre sur  $] -1, \infty[$  l'équation différentielle

$$(x+1)y' + (x-1)y = 0.$$

**Exercice 2.**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1.$$

1. Déterminer une solution particulière de l'équation  $(E)$ .
2. Déterminer la solution générale de l'équation  $(E)$ .
3. Quelle est la solution de  $(E)$  vérifiant la condition  $y(0) = 1$  ?

**Exercice 3.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2.  $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
3.  $y' + y = xe^x - x$
4.  $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

**Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + y = 1$  sur  $\mathbf{R}$
2.  $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$  sur  $] -1, \infty[$
3.  $y' - \frac{y}{x} = x^2$  sur  $]0, \infty[$
4.  $y' - \frac{2}{t}y = t^2$  sur  $]0, \infty[$

**Exercice 5.** Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C + x}{1 + x^2},$$

$C \in \mathbf{R}$ .

**Exercice 6.** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^4 + 1)y' - x^3y = x^5 - x^3 + 2x + 1.$$

1. Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

**Exercice 7.** Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement  $v$  d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle (E)

$$4v' + v = 3e^{x/2} - 1$$

avec la condition initiale  $v_0 = 0$ .

1. Résoudre l'équation différentielle  $4v' + v = 0$ .
2. Trouver une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (E) sur  $\mathbf{R}$ .
4. Déterminer la solution particulière vérifiant  $v(0) = 0$ .

**Exercice 8.** Déterminer les fonctions  $f = \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dérivables et vérifiant, pour tous  $s, t \in \mathbf{R}$ ,

$$f(s + t) = f(s)f(t).$$

**Exercice 9.** On se propose d'intégrer sur  $]0, \infty[$  l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2.$$

1. Trouver une solution particulière  $y_0$  de (E) sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Montrer que le changement de fonction  $y(x) = y_0(x) - 1/z(x)$  transforme l'équation (E) en l'équation différentielle (E<sub>1</sub>),

$$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z = 1.$$

3. Intégrer (E<sub>1</sub>) sur  $]0, \infty[$ .
4. Donner toutes les solutions de (E) sur  $]0, \infty[$ .