

---

**Feuille d'exercices d'algèbre n° 3**

NOMBRES COMPLEXES (PREMIÈRE PARTIE : SANS LA FORME TRIGONOMETRIQUE)

---

## 1 Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

### Exercice 1.

1. Calculer  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. Calculer  $(1 + i)^8$ .

### Exercice 2.

1. Écrire le conjugué de  $z = \frac{4 - 5i}{3 + i}$ , puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Soit  $z$  un complexe. Quel est le conjugué de  $w = \frac{2z^2 - i}{5z + 1}$  ?

### Exercice 3.

1. Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ , exprimer  $1/z$  sous forme algébrique.
2. Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et tout  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases} .$$

### Exercice 4. On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1. Soit  $P$  une fonction polynomiale à coefficients réels et  $z$  un complexe. Montrer que si  $P(z) = 0$ , alors aussi  $P(\bar{z}) = 0$
2. Calculer  $j\bar{j}$  et  $j + \bar{j}$ .
3. En déduire  $j(-1 - j)$ , puis constater que  $j$  est solution de l'équation  $z^2 + z + 1 = 0$ . Quelle est l'autre solution ?
4. Résoudre l'équation  $z^3 = 1$ .
5. Justifier le plus économiquement possible que  $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$ .

### Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\frac{iz - 1}{z - i}$ soit réel.

### Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$ , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ .

### Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si $z$ est réel.

**Exercice 8.** Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes de module 1 tels que  $zz' \neq -1$ . Démontrer que  $\frac{z+z'}{1+zz'}$  est réel, et préciser son module.

**Exercice 9.** Soit  $u, v$  et  $w$  trois nombres complexes tels que  $|u| = |v| = |w| = 1$ . Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

**Exercice 10.**

Soit  $u$  et  $v$  deux nombres complexes distincts tous deux de module 1. Montrer que pour tout complexe  $z$ , le nombre complexe :  $\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$  est un nombre réel négatif ou nul.

**Exercice 11.**

La notation  $j$  désigne le complexe  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  étudié à l'exercice 4.

On note  $F$  l'application de  $\mathbb{C}^3$  vers  $\mathbb{C}^3$  définie pour tout  $(u, v, w)$  de  $\mathbb{C}^3$  par :

$$F(u, v, w) = (u + v + w, u + jv + j^2w, u + j^2v + jw).$$

1. Calculer  $F \circ F$ . En déduire que  $F$  est bijective et que  $F^{-1} = \frac{1}{9}(F \circ F \circ F)$ .
2. Soit  $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ . Montrer l'équivalence suivante :

$$F(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \iff u \in \mathbb{R}, v + w \in \mathbb{R} \text{ et } jv + j^2w \in \mathbb{R}.$$

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante plus simple que celle trouvée à la question précédente pour que  $F(u, v, w)$  soit dans  $\mathbb{R}^3$ .

## 2 Autour des racines carrées

**Exercice 12.** Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :  $\Delta_1 = 3 + 4i$ ,  $\Delta_2 = 8 - 6i$ ,  $\Delta_3 = -25$ ,  $\Delta_4 = 49$ ,  $\Delta_5 = 50i$ .

**Exercice 13.** Résoudre les équations du second degré suivantes :

$$1. z^2 + 2z + 10 = 0 \quad 2. z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 \quad 3. iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$$

**Exercice 14.** Résoudre l'équation suivante :

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0.$$

**Exercice 15.** On considère l'équation en  $z \in \mathbb{C}$  suivante :  $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$ .

1. Déterminer une racine réelle  $z_0$  de cette équation.
2. Pour  $z \in \mathbb{C}$ , factoriser  $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$  par  $(z - z_0)$ .
3. Résoudre l'équation.