

**Feuille d'exercices d' Algèbre n° 2**

BIJECTIONS ET DÉNOMBREMENT

**Exercice 1.**

1. On note  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ . Décrire les ensembles  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  et  $A \times B$ .
2. On note  $A = [1, 3]$  et  $B = ]2, 4]$ . Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .
3. Déterminer  $]3, 8[ \cap \mathbb{Z}$ ,  $[-3, 2[ \cap \mathbb{N}$  et  $]0, 1[ \cap \mathbb{Z}$ .
4. Déterminer le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  des parties  $] - \infty, 0]$  et  $[1, 2[$ .
5. Déterminer  $] - 2, 3] \setminus \mathbb{Z}$ ,  $] - 2, 3] \setminus [0, 4]$  et  $] - 2, 3] \setminus [-4, 4]$ .

**Exercice 2.**

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Écrire les ensembles suivants en extension.
  - (a)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2 \}$  ;
  - (b)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid n < 1 \}$  ;
  - (c)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2 \}$  ;
  - (d)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \}$  ;
  - (e)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n < m \}$  ;
  - (f)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12 \text{ ou } n \text{ divise } 55 \}$  ;
  - (g)  $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7 \}$ .

**Exercice 3.** Décider si les ensembles suivants sont vides.

1.  $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x \geq 2 \}$  ;
2.  $\left\{ x \in \mathbb{R}_- \mid \frac{x+1}{2x-1} > 4 \right\}$  ;
3.  $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3xy + 4y^2 = -1 \}$  ;
4.  $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3xy + 4y^2 = 4 \}$  ;
5.  $\{ (x, y) \in [0, 5] \times [0, 3] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0 \}$ .

**Exercice 4.** Soit  $E$  un ensemble et  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ .

1. Montrer  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$  et  
 $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .
2. Montrer l'équivalence des propositions :
  - (a)  $A \subset B$  ;

(b)  $A \cap B = A$ ;

(c)  $A \cup B = B$ ;

(d)  $A \setminus B = \emptyset$ .

3. Montrer l'équivalence des propositions :

(a)  $A \cup B = A \cap C$ ;

(b)  $B \subset A \subset C$ .

4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C.$$

**Exercice 5.** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1.  $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$     2.  $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$     3.  $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, 4x - 2y) \end{cases}$     4.  $k : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

**Exercice 6.** Soit :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ et soit } g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \qquad n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont-elles injectives, surjectives ? Comparer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x/(1+x^2)$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que  $f(\mathbb{R}) = [-1, +1]$ .
3. Montrer que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  définie par  $g(x) = f(x)$  est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de  $f$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  avec  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$ . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective.
2.  $f$  est surjective.
3.  $f$  est bijective.

**Exercice 9.** Pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  on désigne par  $I_n$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

1. On suppose  $n \geq 2$ . Combien y a-t-il d'applications injectives  $f : I_2 \rightarrow I_n$  ?
2. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de  $I_p$  dans  $I_n$  ?
3. A quelle condition portant sur les entiers  $m$  et  $n$  peut-on définir une application  $f : I_m \rightarrow I_n$  qui soit injective, surjective, bijective ?

**Exercice 10.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il y a  $n!$  bijections de  $E$  vers  $E$ .

**Exercice 11. Indicatrice d'une partie d'un ensemble**

Soit  $E$  un ensemble. On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble de parties de  $E$ . Soit  $A$  une partie de  $E$  :  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On note  $\bar{A} = E \setminus A$ , le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

Pour tout  $A \subset E$  on définit une fonction *indicatrice de  $A$*  sur  $E$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , notée  $\mathbb{1}_A$ , définie pour  $\forall x \in E$  par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :

(a) Soient  $E = \{a, b, c, d\}$ ,  $A = \{a, b, c\} \subset E$  et  $B = \{c, d\} \subset E$ . Expliciter les fonctions  $\mathbb{1}_E, \mathbb{1}_\emptyset, \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_{\bar{A}}, \mathbb{1}_B$  ainsi que  $\mathbb{1}_{A \cap B}$  et  $\mathbb{1}_{A \cup B}$ .

(b) Soient  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  sa fonction indicatrice sur  $\mathbb{R}$ . Décrire les ensembles  $\mathbb{1}_A(A), \mathbb{1}_A(\bar{A}), \mathbb{1}_A(\mathbb{R}), \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}), \mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}), \mathbb{1}_A^{-1}(\{0, 1\})$ .

2. Soient  $E$  un ensemble et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :

(a) Inclusion :  $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ . (Cela veut dire que pour  $\forall x \in E$ , on a  $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$ .)

Égalité :  $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ .

(b) Opérations ensemblistes :

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A; \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B; \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B.$$

(c) Lien avec le cardinal : si  $A$  est une partie finie de  $E$  alors  $|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ .

3. Formule du crible. Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

4. Soit  $E$  un ensemble fini de cardinalité  $n$ . Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ .

(a) Quel est le cardinal de  $\mathcal{F}$ ?

(b) Soit

$$\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F} : A \mapsto \mathbb{1}_A$$

une application qui à chaque partie  $A$  de  $E$  associe sa fonction indicatrice. Montrer que  $\phi$  est une application injective. En déduire que  $\phi$  est bijective.

(c) En déduire que  $\mathcal{P}(E)$  est fini et calculer son cardinal.

5. Soit  $E$  un ensemble fini de cardinalité  $n$ . Calculer  $\sum_{A, B \subset E} |A \cap B|, \sum_{A, B \subset E} |A \cup B|$ .

**Exercice 12. Deux autres preuves**

Soit  $E$  un ensemble, avec  $\text{Card}(E) = n$ . Démontrer que  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ ,

— en utilisant les coefficients  $\binom{n}{k}$ ;

— en raisonnant par récurrence sur  $n$ .

**Exercice 13.** Montrer que  $\mathbb{Z}$  est dénombrable à l'aide de l'application  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$