Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Math III - PMI Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}([-1;1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1;1]$, muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Notons $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ les sous-espaces vectoriels de E des fonctions impaires et paires respectivement.

1. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.
2. Soit $(f, p, i) \in E \times \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tel que $f = p + i$. Exprimer p et i en fonction de f.
3. Utiliser les questions précédentes pour montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
4. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.
   On veillera à montrer les deux inclusions.
5. Soit ψ l'endomorphisme de E défini par : $\psi(f) : x \mapsto f(-x)$. Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 2.

1. Dans un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ x_i > 0 \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir l'inégalité suivante :
$$n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k.$$
3. En déduire l'inégalité
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$
4. Déterminer l'ensemble des $x \in A$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = n^2$.

Exercice 3. Soit $\gamma \in [0;1]$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)dt.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Toujours avec $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, montrer que, pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \geq q$, on a une majoration de $|u_p(x) - u_q(x)|$ puis en déduire que la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
   On notera u la limite (simple) de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) converge uniformément sur $[0;a]$ pour tout $a \in]0;+\infty[$.
   En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)dt.$$

   En déduire que u est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u'(x) = u(\gamma x)$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour $n \geq 1$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. La série converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? normalement ?

Une correction du DS 3 commun

Exercice 1.

1. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Alors pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ d'où $f(x) = 0$. Ainsi f est nulle.
2. Soit $x \in [-1;1]$. On a d'une part $f(x) = p(x) + i(x)$ par hypothèse. D'autre part, par parité de p et imparité de i, on a : $f(-x) = p(x) - i(x)$.
   Si on ajoute ces deux égalités, on obtient $f(x) + f(-x) = 2p(x)$ d'où $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Si on les retranche, on obtient : $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
3. Grâce à la question 1, il suffit de montrer que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ et comme l'inclusion droite-gauche est triviale, il suffit de montrer l'inclusion gauche-droite. Soit alors $f \in E$. Soient p et i définis pour tout $x \in [-1, 1]$ par $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On a alors facilement $f = p + i$. De plus pour tout x, $p(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x)$ donc p appartient à $\mathcal{P}$. De même $i(-x) = -i(x)$ donc $i \in \mathcal{I}$. Ceci montre que $f \in \mathcal{P} + \mathcal{I}$ d'où l'inclusion voulue.
4. Montrons, pour commencer, l'inclusion $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}^{\perp}$. Soit $i \in \mathcal{I}$. Soit alors $p \in \mathcal{P}$. Pour $x \in [-1;1]$, $ip(-x) = i(-x)p(-x) = -i(x)p(x) = -ip(x)$ ce qui montre que le produit ip est impaire. Par conséquent l'intégrale $\int_{-1}^{1} i(t)p(t)dt$ est nul et donc le produit scalaire $\langle i, p\rangle$ est nul. Ainsi i est orthogonal à tout élément de $\mathcal{P}$, i.e. i appartient à $\mathcal{P}^{\perp}$ d'où la première inclusion.

   Montrons l'inclusion inverse. Soit donc $f \in \mathcal{P}^{\perp}$. Par la question 3, on peut le décomposer sous la forme $f = p + i$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$. Par hypothèse sur f, on a $\langle f, p\rangle = 0$. Ainsi $0 = \langle p + i, p\rangle = \langle p, p\rangle + \langle i, p\rangle$. Le produit ip étant impair, on a comme précédemment $\langle i, p\rangle = 0$, ce qui entraine $\langle p, p\rangle = 0$. Autrement dit $\int_{-1}^{1} p^2(t)dt = 0$. Mais la fonction p^2 est continue et positive, elle est donc nulle. Par conséquent $f = i$, i.e. $f \in \mathcal{I}$, d'où l'inclusion recherchée.
5. Pour répondre à la question il suffit de montrer que $\psi(p + p') = p - p'$ pour tous $p \in \mathcal{P}$ et $p' \in \mathcal{P}^{\perp}$. Or on a vu que $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{I}$, soient donc $p \in \mathcal{P}, i \in \mathcal{I}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\psi(p+i)(x) = (p+i)(-x) = p(-x)+i(-x) = p(x) - i(x) = (p - i)(x)$. On a bien $\psi(p + i) = p - i$.

Exercice 2.

1. Pour $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $u = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$ dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
3. Trivial.
4. Soit $x \in A$ pour lequel $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = n^2$. Alors l'inégalité de la question 2 est une égalité. Par conséquent, u et v sont liés. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n}) = \lambda(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$. Par conséquent, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\sqrt{x_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_k}}$, d'où $x_k = \lambda$. Ainsi $x = (\lambda, \ldots, \lambda)$. Or $x_1 + \cdots + x_n = 1$ donc $n \cdot \lambda = 1$ donc $x = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$.

   A ce stade, on a montré l'inclusion $A \subseteq \{(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})\}$. L'inclusion inverse est facile. On obtient donc l'égalité.

Exercice 3.

1. On vérifie que l'inégalité est vraie pour $n = 0$. Traitons l'étape d'induction. Soit $n \geq 0$ un entier pour lequel

l'inégalité est supposée vraie. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) &= \int_0^x u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) dt \\
&\leq \int_0^x \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \\
&\leq \int_0^x \gamma^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt \\
&\leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt \text{ car } 0 \leq \gamma \leq 1.
\end{aligned}$$

De plus $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ car on intègre $u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)$ qui est positif par hypothèse.

2. En écrivant $u_p(x) - u_q(x) = u_p(x) - u_{p-1}(x) + u_{p-1}(x) - \cdots - u_{q+1}(x) + u_{q+1}(x) - u_q(x)$ et en utilisant la question 1, on obtient l'inégalité suivante :

$$0 \leq u_p(x) - u_q(x) \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{x^k}{k!} = S_p(x) - S_q(x)$$

où on a posé $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Or la suite (numérique) $(S_n(x))$ est convergente (vers e^x) donc elle est de Cauchy, donc la suite (numérique) $(u_n(x))$ est de Cauchy et donc convergente ; d'où la convergence simple de la suite (de fonctions) (u_n).

3. Montrons que la suite (R_n) définie par $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$ converge uniformément vers 0. Toujours en utilisant la question 1 et en faisant comme dans la 2, on a l'inégalité : pour $x \in [0; a]$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \sum_{k \geq n+1} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k \geq n+1} \frac{a^k}{k!}$$

et le membre de droite tend vers 0 (car la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ converge) d'où la convergence uniforme voulue. On en déduit que la suite (u_n) converge uniformément sur $[0; a]$.

Par une récurrence facile, on montre que tous les u_n sont continus sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur $[0; a]$. La convergence uniforme entraine la continuité de u.

4. On fixe $x \in \mathbb{R}^+$. Pour tout n, on a

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t) dt.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient

$$u(x) = 1 + \lim_{n \to +\infty} \int_0^x u_n(\gamma t) dt.$$

La convergence uniforme de u_n vers u sur $[0; x]$ permet de permuter la limite et l'intégrale et on obtient l'égalité voulue.

La fonction $x \mapsto \int_0^x u(\gamma t) dt$ est dérivable et a pour dérivée la fonction $x \mapsto u(\gamma x)$ d'où u est dérivable sur R^+ et $u'(x) = u(\gamma x)$.

Exercice 4.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on peut appliquer le théorème de convergence sur les séries alternées.
2. La série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet, toujours en utilisant le théorème sur les séries alternées, on peut majorer $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$. Par contre il n'y a pas convergence normale. Par exemple $\sum_{k=1}^{n} |f_k(\frac{1}{\sqrt{k}})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ et cette série diverge donc la série $\sum \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ diverge. On pouvait aussi étudier les variations de $x \mapsto \frac{1}{n+x^2}$ pour en déterminer le sup.