Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I

Devoir n° 2

Problème CCP du 14 octobre 2015

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Études de fonctions

Partie I

`Catalogue d'inégalités`

Indication : les inégalités suivantes se démontrent par des études de fonctions. On pourra être amener à dériver deux fois pour montrer une inégalité.

1. Montrer que tout tout $t \in \mathbf{R}$, $e^t \geq 1 + t$.
2. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $e^t \geq 1 + t + t^2/2$.
   En déduire que pour tout $t \geq 0$, $e^{t/2} \geq 1 + t/2 + t^2/8$.

Partie II

Soit la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{R}^{+*} &\to \mathbf{R} \\ t &\mapsto \tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{e^t - 1}. \end{aligned}$$

1. Grâce à la question 1) de la partie I, donner le signe de Φ sur son domaine de définition.
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t)$.
3. `Sens de variation de` Φ.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction Φ sur son domaine de définition (on supposera Φ dérivable). On exprimera le numérateur de Φ' sous forme d'un produit de 2 facteurs.
   (b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $te^{t/2} + e^t - 1 \geq 0$.
   (c) Soit la fonction

   $$\begin{aligned} \psi : \mathbf{R}^{+} &\to \mathbf{R} \\ t &\mapsto -te^{t/2} + e^t - 1. \end{aligned}$$

   Calculer $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t)$.

   Grâce à la question 2) de la partie I, déduire que pour tout $t \geq 0$,

   $$e^t \geq e^{t/2}(1 + t/2).$$

   En déduire le sens de variation ψ sur $\mathbf{R}^+$ et que pour tout $t \geq 0$, $\psi(t) \geq 0$.

(d) En déduire le tableau de variations de Φ.

4. `Limite en` 0^+.

(a) Montrer, toujours grâce à la partie I, que pour tout $t > 0$,

$$\Phi(t) \geq \frac{t}{2(e^t - 1)}.$$

(b) Calculer

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{2(e^t - 1)}.$$

(c) Par une étude de fonction, montrer que pour tout $t > 0$,

$$2e^t - te^t - t - 2 \leq 0.$$

En déduire que

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2}.$$

(d) Grâce aux 2 questions précédentes, montrer que Φ admet une limite en 0^+ et calculer cette limite.

5. Faire un graphe "sommaire" de Φ sur son domaine de définition.

Partie III

Soit $\alpha \in]0, 1/2[$ et la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha : \mathbf{R}^{+*} &\to \mathbf{R} \\ t &\mapsto \tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{e^{\alpha t} - 1}. \end{aligned}$$

1. Calculer $\lim_{t \to +\infty} \Phi_\alpha(t)$.

2. `Limite en` 0^+

(a) Montrer que pour tout $t \in [0, \ln(2)/\alpha]$,

$$e^{\alpha t} \leq 1 + 2\alpha t.$$

(b) En déduire que $\lim_{t \to 0} \Phi_\alpha(t) = -\infty$.

3. `Signe de` Φ_α `à l'infini`

(a) Montrer qu'il existe $t^* > 0$ tel que pour tout $t \geq t^*$,

$$e^{\frac{\alpha}{2} t} \geq \frac{2}{\alpha}.$$

En utilisant l'inégalité suivante, $\forall t \geq 0$, $e^{\frac{\alpha}{2} t} \geq 1 + \frac{\alpha}{2} t$, montrer que pour tout $t \geq t^*$

$$e^{\alpha t} - 1 - t \geq 0.$$

(b) En déduire que pour tout $t \geq t^*$,

$$\Phi_\alpha(t) \geq 0.$$

4. Proposer un graphe de Φ_α sur son domaine de définition.