Correction du problème CCP n°2

Partie I

1) Soit la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t - 1 - t \end{array}$.

f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = e^t - 1$.
Le tableau de variations de f est donc le suivant :

t		0	
$f'(t)$	$-$		$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Par ailleurs $f(0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$ et donc $e^t \geq 1 + t$

2) Soit maintenant la fonction $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t - 1 - \frac{t^2}{2} - t \end{array}$.

De même g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ g'(t) = e^t - t - 1$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $g'(t) \geq 0$ d'après la question précédente. Le tableau de variation de g est alors

t	0	
$g'(t)$		$+$
g	0	$\nearrow$

$g(0) = 0$ donc puisque g est croissante $\forall t \geq 0$, $g(t) \geq 0$ ce qui démontre l'inégalité demandée.

~~Posons $u = \frac{t}{2} \geq 0$, alors~~

Si on applique l'inégalité démontrée à $\frac{t}{2}$ où $t \geq 0$, on obtient alors $\forall t \geq 0$ $e^{t/2} \geq 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8}$.

Partie II.

1) $\forall t>0$, $\phi(t)=\dfrac{e^t-1-t}{t(e^t-1)}$.

$\forall t>0$, $e^t-1-t\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ et $e^t-1\geqslant 0$. Puisque ϕ est le quotient de 2 quantités positive, $\forall t>0$, $\phi(t)\geqslant 0$.
Ainsi ϕ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{e^t-1}=0$, donc

$\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t)=0$

3) a) La fonction ϕ est dérivable sur son ensemble de définition.
et $\forall t>0$ $\quad\phi'(t)=\dfrac{-1}{t^2}+\dfrac{e^t}{(e^t-1)^2}$

$\phi'(t)=\dfrac{(te^{\frac{t}{2}}-e^t+1)(te^{\frac{t}{2}}+e^t-1)}{t^2(e^t-1)^2}$

b) De manière évidente, $\forall t\geqslant 0$ $te^{t/2}\geqslant 0$ et $e^t-1\geqslant 0$.
Donc $\forall t\geqslant 0$, $te^{\frac{t}{2}}+e^t-1\geqslant 0$

c) $\forall t\geqslant 0$, $\psi(t)=e^t\left(-\dfrac{t}{e^{t/2}}+1-\dfrac{1}{e^t}\right)$.
Par les croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^{t/2}}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-1}{e^t}=0$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=+\infty$

En utilisant la dernière question de la partie I on a

$\forall t\geqslant 0$, $e^t=e^{t/2}e^{t/2}\geqslant e^{t/2}(1+t/2)$.
La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t\geqslant 0$, $\psi'(t)=-e^{t/2}-\frac{t}{2}e^{t/2}+e^t$.
Grâce à l'inégalité précédente, $\forall t\geqslant 0$, $\psi'(t)\geqslant -e^{t/2}-\frac{t}{2}e^{t/2}+e^{t/2}(1+\frac{t}{2})=0$

Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a $\varphi(0) = 0$, donc (3)

$\forall t \geq 0, \ \varphi(t) \geq 0$.

d) Ainsi $\forall t \geq 0 \quad te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 \leq 0$, $\quad te^{t/2} + e^t - 1 \geq 0$

et bien entendu $t^2(e^t-1)^2 \geq 0$. Donc d'après la question 3) a), $\forall t \geq 0$, $\phi'(t) \geq 0$.

La fonction ϕ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) a) ~~$\forall t>0$~~ $\cancel{\phi(t) - \frac{t}{2(e^t-1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t-1} - \frac{t}{2(e^t-1)}}$

$\forall t > 0$, $\phi(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t(e^t-1)}$, d'après l'inégalité demontrée

dans la partie I, $\forall t \geq 0 \quad e^t - 1 - t \geq t^2/2$. Ainsi

$$\forall t > 0, \quad \phi(t) \geq \frac{t^2}{t\,2(e^t-1)} = \frac{t}{2(e^t-1)}.$$

b) Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^t$. h est derivable en $t=0$

donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{h(t) - h(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = h'(0) = 1$

Donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t}{2(e^t-1)} = \dfrac{1}{2}$

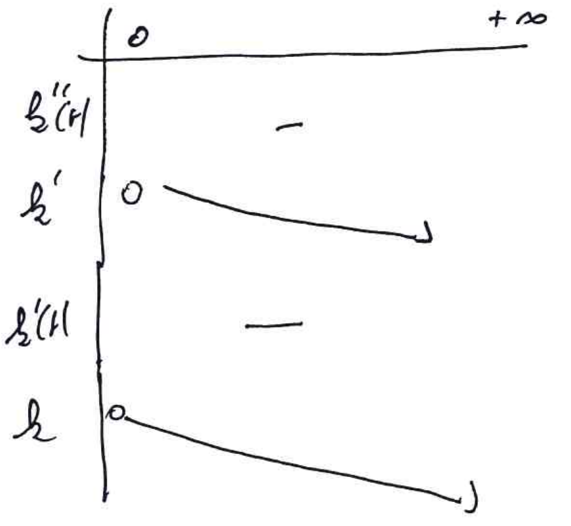
c) Soit la fonction $k : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto 2e^t - te^t - t - 2$

k est infiniment derivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \geq 0$

$k'(t) = 2e^t - e^t - te^t - 1 = e^t - te^t - 1$

$\forall t \geq 0$, $k''(t) = e^t - e^t - te^t = -te^t$.

On peut donc tracer le tableau de variation de k.



$k'(0) = 0$

$k(0) = 0$

La fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, nulle en $t=0$ donc k est négative sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $\forall t \geq 0, \quad 2e^t - te^t - t - 2 \leq 0$.

$$\forall t > 0, \quad \phi(t) - \frac{1}{2} = \frac{e^t - 1 - t}{t(e^t-1)} - \frac{1}{2}$$

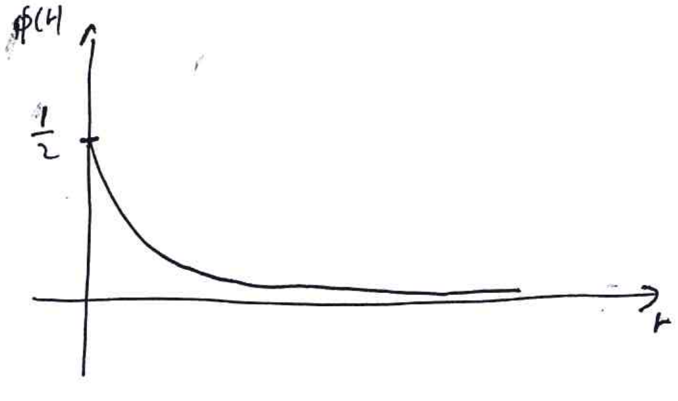
$$= \frac{2e^t - 2 - 2t - te^t + t}{2t(e^t-1)}$$

$$= \frac{2e^t - 2 - t - te^t}{2t(e^t-1)}$$

Ainsi par ce qui précède $\forall t > 0, \quad \phi(t) - \frac{1}{2} \leq 0$ ce qui démontre le résultat demandé.

d) On a montré que $\forall t > 0, \ \frac{t}{2(e^t-1)} \leq \phi(t) \leq \frac{1}{2}$, par ailleurs on sait que $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{t}{2(e^t-1)} = \frac{1}{2}$. Par le théorème des gendarmes, ϕ admet une limite en 0^+ et $\lim\limits_{t \to 0^+} \phi(t) = \frac{1}{2}$.

5)



Partie III

1) Le paramètre α étant positif donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{\alpha t}-1} = 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$,

on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_\alpha(t) = 0$

2) a) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^{\alpha t} - 1 - 2\alpha t$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$,

et $\forall t \geq 0 \quad f'(t) = \alpha e^{\alpha t} - 2\alpha = \alpha(e^{\alpha t} - 2)$

$\forall t \geq 0$, $f'(t) = 0$ ssi $e^{\alpha t} = 2$ ssi $t = \frac{\ln 2}{\alpha}$. On peut donc

tracer le tableau de variations de f :

t	0		$\frac{\ln 2}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	

$f(0) = 0$

Puisque $f(0) = 0$ et f est décroissante sur $[0, \frac{\ln 2}{\alpha}]$, on a

$\forall t \in [0, \frac{\ln 2}{\alpha}]$, $f(t) \leq 0$ ce qui est le résultat demandé.

b) $\forall t > 0$, $\quad \phi_\alpha(t) = \dfrac{e^{\alpha t} - 1 - t}{t(e^{\alpha t} - 1)} \leq \dfrac{2\alpha t - t}{t(e^{\alpha t} - 1)} = \dfrac{2\alpha - 1}{e^{\alpha t} - 1}$

Puisque $2\alpha - 1 < 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{2\alpha - 1}{e^{\alpha t} - 1} = -\infty$. Ainsi par

le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to 0^+} \phi_\alpha(t) = -\infty$.

3) $\forall t \geq 0 \qquad e^{\frac{\alpha}{2} t} \geq \frac{2}{\alpha} \iff \frac{\alpha}{2} t \geq \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)$

$\iff t \geq \frac{2}{\alpha} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)$

Posons donc $t^* = \frac{2}{\alpha} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)$, ainsi si $t \geq t^*$

on a bien $e^{\frac{\alpha}{2} t} \geq \frac{2}{\alpha}$. On remarque que puisque $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$,

$t^* > 0$.

$\forall t \geqslant t^*, \quad e^{\alpha t} - 1 - t = e^{\frac{\alpha}{2}t} e^{\frac{\alpha}{2}t} - 1 - t$

$\geqslant \frac{2}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right) - 1 - t$

$= \frac{2}{\alpha} + t - 1 - t = \frac{2-\alpha}{\alpha} \geqslant 0.$

b) $\forall t \geqslant 0, \quad \phi_\alpha(t) = \dfrac{e^{\alpha t} - t - 1}{t(e^{\alpha t} - 1)}$.

Par l'inégalité de la question a) si $t \geqslant t^*$

alors $\phi_\alpha(t) \geqslant 0$ car $e^{\alpha t} - 1 - 1 \geqslant 0$ et $t(e^{\alpha t} - 1) \geqslant 0$.

4)