Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Math III - PMI Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit A la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & -8 \\ -6 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer le rang de $u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.
2. En déduire que -1 est une valeur propre de u et déterminer une base de l'espace propre associé E_{-1}.
3. Déterminer la trace de u et en déduire les éventuelles autres valeurs propres de u.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   Si oui, déterminer une base de vecteurs propres de u.

Exercice 2. Soit A la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice B suivante est-elle diagonalisable ? Est-elle semblable à la matrice A ?

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Étant donné un réel a, on considère la matrice C_a suivante :

$$C_a = \begin{pmatrix} -2 & a & -1 \\ 0 & 7 & a \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les éventuelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles C_a est semblable à A.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\| \ \|_\infty$ la norme infinie sur E. Soit n un entier positif et non nul.

1. Rappeler la définition de $\| \ \|_\infty$.
2. On se donne une famille $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ d'éléments de E.
   On définit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $N((x_1, \ldots, x_n)) = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$.
   Montrer que N est une norme si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 4. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite convexe si pour tous $a, b \in A$, le segment $[a; b]$ est inclus dans A. On rappelle que $[a; b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0;1]\}$. Étant donnés $\alpha \in E$ et $r > 0$, montrer que la boule ouverte $B(\alpha, r)$ est convexe.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \in E$ par $f_n(x) = nx$ si $x \in [0; \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{n}; 1]$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge vers la fonction constante 1 si E est équipé de la norme $\| \ \|_1$.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas dans E si ce dernier est équipé de la norme $\| \ \|_\infty$.
3. En déduire que les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.

1. Si on note I_4 la matrice identité de taille 4 alors
$$A+\mathrm{I}_4=\begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & -8 \\ -6 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
Si on désigne par C_i les colonnes de cette matrice, on a $C_1=3C_2$, $C_4=-2C_2$ et $C_3=0C_2$ donc les colonnes sont toutes colinéaires à C_2. On en déduit que le rang de $A+\mathrm{I}_4$, et donc celui de $u+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$, est 1.

2. Par le théorème du rang, on obtient $\dim E_{-1}=\dim\ker(u+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})=4-\mathrm{rg}(u+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})=3$. Par conséquent, -1 est une valeur propre de u et son espace propre associé est de dimension 3. Pour en déterminer une base, il suffit de trouver trois vecteurs libres de E_{-1}. Dans la matrice ci-dessus, on constate qu'on a les relations suivantes entres les colonnes C_i :
$$C_1-3C_2=0, \qquad C_3=0, \qquad C_4-2C_2=0.$$
On en déduit que E_{-1} est engendré par
$$v_1=(1,-3,0,0), \qquad v_2=(0,0,1,0), \qquad v_3=(0,-2,0,1).$$
Ces vecteurs sont clairement libres et forment donc une base de E_{-1}.

3. La trace de u est égale à celle de A qui est $11-3-1-5=2$. D'autre part on sait que la somme des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) d'une matrice complexe est égale à la trace de cette matrice. Dans notre cas, la mutltiplicité de -1 est au moins 3. En résolvant $(-1)\times 3+\lambda=2$ on obtient $\lambda=5$. Les valeurs propres de A, et donc de u, sont -1 et 5 avec -1 de multiplicité 3 et 5 de multiplicité 1.

4. On a bien $\dim E_{-1}=3=\mathrm{mult}(-1)$. De plus $1\leq \dim E_5$ car 5 est valeur propre et $\dim E_5\leq \mathrm{mult}(5)=1$. On déduit que u est diagonalisable. Nous avons déjà trois vecteurs propres libres dans E_{-1} donc pour obtenir une base de vecteurs propres, il ne nous reste qu'à trouver un vecteur propre de E_5 (qui en sera une base). Pour cela, considérons
$$B_1=A-5\cdot\mathrm{I}_4=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & -8 \\ -6 & -8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$
dont on aimerait déterminer un élément du noyau.
Faire des opérations élémentaires sur <u>les lignes</u> d'une matrice ne modifient pas le noyau (c'est comme échelonner un système en utilisant le pivot de Gauss). Ainsi le noyau de B_1 est égal au noyau de la matrice suivante :
$$B_2=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qu'on a obtenue par les opérations suivante : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ dans B_1.

Dans B_2, on effectue les opérations : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et on obtient :

$$B_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que les matrices B_i ont toutes le même noyau. Dans B_3, on voit que $2C_1 - C_2 + C_4 = 0$. On en déduit que E_5 est engendré par le vecteur $v_4 = (2, -1, 0, 1)$. Les v_i forment une base de vecteurs propre de u.

Exercice 2.

1. On peut faire le calcul ou bien remarquer que -2 est valeur propre (en ajoutant 2 sur la diagonale) puis grâce à la trace trouver l'autre valeur propre qui est 7. Au final $P_A = -(X+2)^2(X-7)$.
2. La matrice B a le même polynôme caractéristique que A. Ainsi B a deux valeurs propres dont 7 qui est de multiplicité 1 et -2 qui est de multiplicité 2. Ainsi B sera diagonalisable si et s. si l'espace propre $E_{-2} = \ker(B + 2\mathrm{I}_3)$ est de dimension 2. Or

   $$B + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et cette matrice est de rang 2 donc E_{-2} est de dimension 1. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

   B n'est pas semblable à A car si elle l'était, elle serait semblable à la matrice diagonale constituée de $-2, -2, 7$, autrement dit elle serait diagonalisable.
3. Comme dans la question précédente, C_a est semblable à A si et seulement si elle est diagonalisable, ce qui équivaut au fait que $\dim(C_a + 2\mathrm{I}_3) = 2$ ou encore que $(rg)(C_a + 2\mathrm{I}_3) = 1$. Or

   $$C_a + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 9 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Cette matrice est de rang 1 si et seulement la matrice

   $$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 9 & a \end{pmatrix}$$

   est de rang 1 également, et ceci équivaut au fait que son déterminant est nul, i.e. $a^2 + 9 = 0$. Ainsi pour toute valeur de a, C_a n'est pas semblable à A.

Exercice 3.

1. Voir le CM.
2. Supposons la famille $\mathcal{F}$ libre.

   Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $N(\lambda x) = \|\sum_i (\lambda x_i) f_i\|_\infty = \|\lambda \cdot (\sum_i x_i f_i)\|_\infty = |\lambda| \cdot \|\sum_i x_i f_i\|_\infty = |\lambda| \cdot N(x)$.

(b) D'autre part, $N(x+y) = \|\sum_i (x_i + y_i) f_i\|_\infty = \|\sum_i x_i f_i + \sum_i y_i f_i\|_\infty \leq \|\sum_i x_i f_i\|_\infty + \|\sum_i y_i f_i\|_\infty = N(x) + N(y)$.

(c) Supposons $N(x) = 0$ et montrons que $x = 0$.
L'hypothèse implique $\sum_i x_i f_i = 0_E$. La famille $\mathcal{F}$ étant libre, on en déduit que les x_i sont nuls et donc $x = 0$.

Ainsi N est une norme.

Réciproquement, supposons que N soit une norme. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Soient donc $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_1^n x_i f_i = 0_E$. Cela entraine $N((x_1, \ldots, x_n)) = 0$. Comme N est une norme cela implique que $(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Exercice 4. Soient $a, b \in B(\alpha, r)$. Soit $x \in [a; b]$.
Alors il existe $t \in [0; 1]$ tel que $x = ta + (1-t)b$.
On a : $\|x - \alpha\| = \|ta + (1-t)b - \alpha\| = \|t(a-\alpha) + (1-t)(b-\alpha)\| \leq \|t(a-\alpha)\| + \|(1-t)(b-\alpha)\| = |t| \cdot \|a - \alpha\| + |1-t| \cdot \|b - \alpha\| = t \cdot \|a - \alpha\| + (1-t) \cdot \|b - \alpha\| < t \cdot r + (1-t) \cdot r = r$.
Par conséquent $x \in B(\alpha, r)$.

Exercice 5.

1. Notons $\mathbf{1}$ la fonction constante $x \mapsto 1$. Montrons que $\|f_n - \mathbf{1}\|_1 \to 0$.
$$\begin{aligned}
\|f_n - \mathbf{1}\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x) - 1| dx \\
&= \int_0^{1/n} |f_n(x) - 1| dx + \int_{1/n}^1 |f_n(x) - 1| dx \\
&= \int_0^{1/n} |nx - 1| dx + \int_{1/n}^1 |1 - 1| dx \\
&= \int_0^{1/n} (1 - nx) dx \qquad \text{(car } nx \leq 1 \text{ pour } x \leq 1/n) \\
&= [x - \frac{n}{2} x^2]_0^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$
Cette suite tend vers 0 dans $\mathbb{R}$ donc (f_n) tend vers $\mathbf{1}$ pour la norme $\| \ \|_1$.
2. Supposons par l'absurde que (f_n) converge dans E pour la norme $\| \ \|_\infty$. Notons f sa limite. Soit $x_0 \in [0; 1]$. On a pour tout n, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. Cela montre que $f_n(x_0) \to f(x_0)$ quand $n \to +\infty$. Maintenant, si $x_0 > 0$ alors il existe n_0 tel $\frac{1}{n_0} \leq x_0$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, $x_0 \in [\frac{1}{n_0}; 1]$ et $f_n(x_0) = 1$. En passant à la limite, on obtient $f(x_0) = 1$.
D'autre part, pour tout n, $f_n(0) = 0$ donc en passant à la limite $f(0) = 0$.
La limite f n'est donc pas continue ce qui est absurde (car $f \in E$).
3. Supposons par l'absurde que les deux normes en question soient équivalentes. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $g \in E$, $\|g\|_\infty \leq c \cdot \|g\|_1$. Cela entraine que pour tout entier n, $\|f_n - \mathbf{1}\|_\infty \leq c \cdot \|f_n - \mathbf{1}\|_1$. Par la question 1, on obtient que (f_n) tend vers $\mathbf{1}$ pour la norme $\| \ \|_\infty$ ce qui est faux par la question 2.