Fiche 1. Exercices 10, 11, 14.

Souvent on utilise les <u>Croissances comparées</u> :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$$

Plus généralement, pour tous réels $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^b e^{-ax} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x^a|\ln x|^b = 0$$

$\boxed{10.1}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\ln(2+x^2)}\,dx$

$$\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi/2$$

$$\ln(2+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x^2 = 2\ln x$$

$$\frac{\arctan x}{x\ln(2+x^2)} \sim \left(\frac{\pi}{x\ln x}\right)$$

diverge ! (Bertrand - zéro 8)

$\boxed{10.2}$

La primitive de $e^{-\sqrt{t}}$

$$\int e^{-\sqrt{t}}\,dt = \int 2x \cdot e^{-x}\,dx$$

$x = \sqrt{t}$

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x,\ u' = 1 \\ v = -e^{-x},\ v' = e^{-x} \end{array}}$$

$$= 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$$

$$= 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)$$

$e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-2xe^{-x} - 2e^{-x}\right] - 2\left[0 - e^{-0}\right] = 2$$

$\boxed{10.3}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$$

$\sqrt{\ln t}$ n'est pas définie en $t < 1$

on va quand même montrez que l'integrale

$$\int_e^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt \text{ diverge}$$

$\ln t > \sqrt{\ln t}$ (pour $\ln t > 1$)

$\Downarrow$

$-\ln t < -\sqrt{\ln t}$

$$\Rightarrow e^{-\ln t} < e^{-\sqrt{\ln t}}$$

$$\int_e^{+\infty} e^{-\ln t}\,dt = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$$ – diverge (Riemann)

et $$\int_e^{\infty} \frac{dt}{t} < \int_e^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\ln t}}}{t}\,dt$$

$\Rightarrow$ <u>diverge</u> aussi

$\boxed{10.4}$

$$\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}}$$

$$\cosh x \sim_0 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$$

$$\cos x \sim_0 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$$

$$\cosh x - \cos x \sim_0 x^2$$

$$\frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}} \sim_0 \frac{1}{x^{1/2}}$$ – <u>converge en 0</u>

$\boxed{10.5}$ $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\,dx$$

<u>En $+\infty$</u>

$$\frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{\ln x} = \frac{1}{x^{3/2}\ln x}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin 1/x^2}{1/x^2} = 1$

$3/2 > 1 \Rightarrow$ converge (Bertrand)

En 0 : $$\frac{\sqrt{x}\,\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} < \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

converge (en 0 Riemann : $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{2} < 1$)

$\boxed{11.1}$ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \left[-\frac{\cos y}{y}\right]_{\pi/2}^{+\infty}$

$$- \int_{\pi/2}^{+\infty} -\frac{\cos y}{y^2}\,dy = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos y}{y^2}\,dy$$

$u = \frac{1}{y}$ $\quad u' = -\frac{1}{y^2}$ converge

$v = -\cos y$ $\quad v' = \sin y$

car $\left|\frac{\cos y}{y^2}\right| \leq \frac{1}{y^2}$ pour $y > 1$

$$\Rightarrow \left|\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leq \int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Riemann

Et en 0 :

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y}\,dy$ est convergeante

comme l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fini

(on peut prolonger $\frac{\sin y}{y}$ en 0 par continuité par 1, $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$)

$\boxed{11.2}$ $x \to \sin x^2$ sur $[0,1]$ est intégrable ($\sin x^2$ est continue)

Il faut m.q.

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \sin x^2 \, dx \quad \text{existe}$$

Soit $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int_1^A \sin x^2 \, dx = \int_1^{A^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \, dt$$

$u = \cos t \qquad u' = \sin t$

$v = \sqrt{t} \qquad v' = t^{-3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= -\frac{\cos A^2}{2\sqrt{A}} + \frac{\cos 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{A^2} \cos t \cdot t^{-3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$|\cos t \cdot t^{-3/2}| \leq t^{-3/2} = \frac{1}{t^{3/2}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \, dt$ existe (Riemann)

donc $\lim_{A \to +\infty} \int_1^{A^2} \cos t \cdot t^{-3/2} \, dt$ aussi

$$\lim_{A \to +\infty} \left(\cos A^2 / 2\sqrt{A}\right) = 0$$

Donc $\int_0^\infty \sin x^2 = 0$ existe !

$\boxed{14.1a}$ $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas integrable sur $[1,+\infty[$

Il faut m.q. $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge

1a) $|\sin t| \geq \sin^2 t$

(evident : $|\sin t| \leq 1$

on multiplie pas un nombre ≤ 1

$|\sin t| \cdot |\sin t| \leq |\sin t|$

$\boxed{14.1b}$ $\int_1^A \frac{\cos 2x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{x}\right]_1^A$ ← nombre fini

$- \underbrace{\int \left(-\frac{1}{x^2} \sin 2x\right) dx}_{\text{converge par comparaison avec } \int^A \frac{1}{x^2} dx}$

$u = \frac{1}{x}$ $u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = \frac{1}{2}\sin 2x$, $v' = \cos 2x$

$\boxed{14.1c}$ $\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^A \frac{\sin^2 x}{x} dx$

Or $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \underbrace{\int^A \frac{1}{2x} dx}_{\text{diverge (Riemann)}} - \underbrace{\int \frac{\cos 2x}{2x} dx}_{\text{converge par 1b}}$

divergeante car $\geq$ divergeante - conv.

$\boxed{14.2a}$ $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt$

$$|\sin t| = \begin{cases} \sin t & , t \in [k\pi, (k+1)\pi] \text{ avec } k\text{-pair} \\ -\sin t & , t \in [k\pi, (k+1)\pi] \\ & k\text{-impair} \end{cases}$$

Dans le deux cas $\rightarrow$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t\,dt = \left|\cos(k+1)\pi - \cos k\pi\right|$$
$$= 2$$

14.2b $\displaystyle\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$

Pour $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$ $\quad k\pi \leq t \leq (k+1)\pi$

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k\pi}$$

alors $\displaystyle\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}$

et $\displaystyle\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \sum_{k=2}^{N} \frac{2}{k\pi}$

14.2c. $\ln(k+1) - \ln k = \ln \dfrac{k+1}{k}$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Donc $\ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} = +\infty$$

Car

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=2}^{N} \left(\ln(k+1) - \ln k\right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(\ln(N+1) - \ln 2\right) = +\infty$$

(d) Puisque

$$\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} \, dt \geq \sum_{k=2}^{N} \frac{2}{k \cdot \pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$$

alors, l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$$ aussi diverge