Fiche 7. Exercice 6.

Enoncé :

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. Trouver la pente de la droite tangente à la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ au point $(1,1)$. Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Solution :

Rappel Théor. des fns implicites de deux variables

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

alors il existe un intervalle ouvert I contenant a, un intervalle ouvert J contenant b et une fonction $g : I \to J$ de classe C^1 t.q. :

1. $I \times J \subset U$
2. pour $(x,y) \in I \times J$ on a l'équivalence :

$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$, en particulier $b = g(a)$.

Remarques : - Si f est de classe C^k, g l'est aussi

- pour $\forall x \in I$ la dérivé

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Ici : $f(x,y) = x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$.

$(a,b) = (1,1)$, $f(1,1) = 0$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (f est un polynôme)

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$, en point $(1,1)$: $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$

Le théo. des fcts implicites nous permet d'affirmer qu'il existe une fonction $g(x)$ au voisinage de $a=1$ t.q. $f(x,y)=0 \iff y = g(x)$.

En particulier, on peut écrire le DL de $g(x)$ au pt. $a=1$ à l'ordre 1 ou plus.

En effet, par exemple pour écrire le D à l'ordre 2 :

$$g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

il faut trouver les valeurs de $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$. $g(1) = 1$ (le point initial $(1,1)$)

Pour trouver $g'(1)$ on peut utiliser la formule du thm. des fonctions implicites $g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}$

ou bien simplement dériver l'égalité

$x^3 - 2xg(x) + 2g(x)^2 - 1 = 0$ obtenue de

$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ par substitution
$y = g(x)$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2xg(x) + 2g^2(x) - 1) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0 \text{ donne}$$

$$3x^2 - 2g(x) - 2xg'(x) + 4g(x)\cdot g'(x) = 0 \implies$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{3x^2 - 2g(x)}{-2x + 4g(x)}$$ en pt $(1,1)$
i.e. $x = 1, g(x) = 1$

cela donne : $$g'(1) = -\frac{3\cdot 1 - 2\cdot 1}{-2\cdot 1 + 4\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

Pour trouver $g''(x)$ on dérive deux fois la même équation :

$$(x^3 - 2xg(x) + 2g^2(x) - 1)'' = 0$$

$$\Rightarrow (3x^2 - 2g(x) - 2xg'(x) + 4g(x)g'(x))' = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 2g'(x) - 2g'(x) - 2x\underline{g''(x)} + 4g'(x)g'(x) + 4g(x)g''(x) = 0$$

$$\Rightarrow g''(x) = -\frac{6x - 4g'(x) + 4(g'(x))^2}{-2x + 4g(x)}$$

On a
$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = 1 \\ g'(x) = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow g''(x) = -\frac{6\cdot 1 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-2\cdot 1 + 4\cdot 1}$$

$$g''(x) = -\frac{9}{2}$$

Ce qu'on voit ici est que même si on n'écrit pas la fonction $g(x)$ explicitement au voisinage du point $(1,1)$ on peut trouver son DL à l'ordre voulu :

$$g(x) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{\left(-\frac{9}{2}\right)}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) \quad (*)$$

La droite tangente passe par le point $(1,1)$ et sa pente est $g'(1) = -\frac{1}{2}$

Alors son équation est

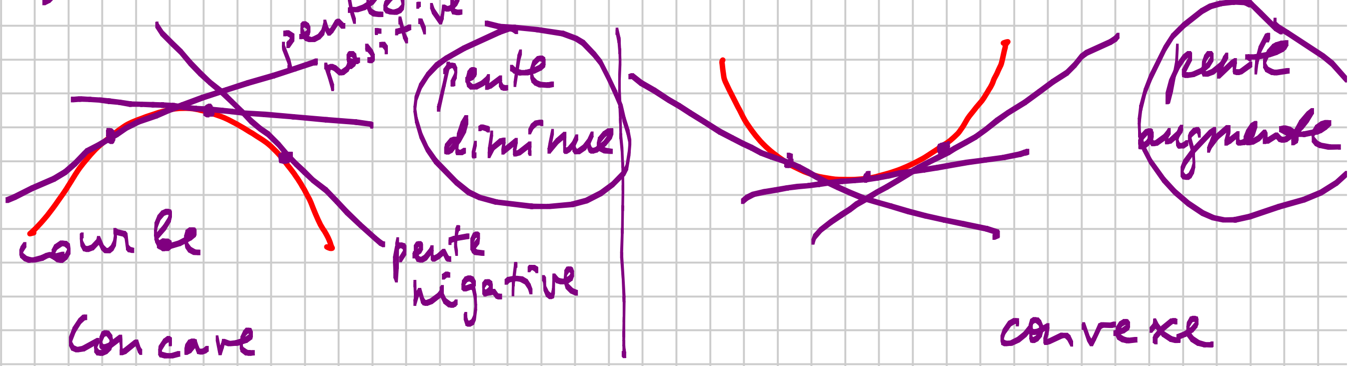
$y = -\frac{1}{2}x + c$ où $1 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$ l'éqn. de la tangente à la courbe $f(x,y) = 1$ au pt. $(1,1)$

Pour préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente on se ramène à une étude des DL à l'ordre 2 (*) :

$$g(x) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) - \frac{9}{4}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

La fonction est sous sa droite tangente si la pente diminue et au-dessous de sa droite tangente si la pente augmente.



Donc il faut regarder le signe de la deuxième dérivé. Ici, c'est négative, donc la pente diminue, donc le graph de la fonction est <u>au dessous</u> de sa tangente au pt. $x = 1$.