Feuille d'exercices n^o 1
CALCUL

Exercice 1. Ordonner les nombres qui suivent : 2 ; 1 ; $\frac{13}{15}$; $\frac{7}{8}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Exercice 2. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tout couple $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, on a : $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a : $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a : $-28 \leq xy \leq 8$.
4. Pour tout couple $(x, y) \in ([-3, -2] \cup [3, 4]) \times ([-4, -1] \cup [1, 2])$, on a : $-12 \leq xy \leq 8$.

Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1 - x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère $P(x) = x^3 + x^2 + 18$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $ax^2 + bx + c \geq 5$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq -\frac{1}{3}$, on a $P(x) > 13$.

Exercice 5.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $x^6 - 6x^3 + 10 \neq 0$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{-x^6 + 6x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^6 - 6x^3 + 10} \geq -1 + \dfrac{6}{x^6 - 6x^3 + 10}$.

Exercice 6.

1. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. Simplifier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. En déduire la limite de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer $(x-y) \times \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$. En déduire $\sum_{i=0}^{n-1} x^i$.
2. Soit a et b deux nombres réels.
   (a) On suppose a et b strictement positifs et qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
   (b) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ pair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
   (c) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ impair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
3. Soit $L \in \mathbf{R}_+$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $|a| \leq L$ et $|b| \leq L$. Montrer que $|a^3 - b^3| \leq 3L^2|a-b|$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$. Montrer que $|a^4 - b^4| \geq 4|a-b|$.

Exercice 8.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, $(f_0, \cdots, f_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(g_0, \cdots, g_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \, (g_{i+1} - g_i) \; = \; - \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i-1}) \, g_i \; + \; (f_n \, g_{n+1} - f_0 \, g_0) \; .$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$.
   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{2} \; \geq \; 0$.
   (b) À quelle condition la somme précédente est-elle nulle ?

Exercice 9.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
2. Résoudre en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ l'équation $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer à quelles conditions $9x^2 - 42xy + 24y^2 \leq 0$.

Indication : écrire les expressions précédentes comme des sommes ou différences de carrés.

Exercice 10.

1. Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $(4, 7)$ et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \right\}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Écrire une équation de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $(4, 7, 1)$ et de rayon 3.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_2 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0 \right\}$ est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 11.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.
2. En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda > 0$, $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(\lambda \, x^2 + \frac{1}{\lambda} \, y^2\right)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ et tout $((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, x_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$, l'on a

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \; \leq \; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \; .$$

Exercice 12. Dans cet exercice, on acceptera comme démonstration même des esquisses d'arguments combinatoires.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [\![0, n]\!]$ et E un ensemble à n éléments.
   (a) On rappelle qu'un *arrangement* de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E. Calculer A_n^p, le nombre d'arrangements de p éléments de E.
   (b) Une *permutation* de E est un arrangement de n éléments de E. Déduire A_n^n, le nombre de permutations de E, de la question précédente.
   (c) Vérifier l'égalité $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et en donner une interprétation combinatoire. On notera que l'on retrouve bien $\mathrm{A}_n^0 = 1$.
   (d) On note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments de E. Démontrer que
   $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$
   puis calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{0}{0}$.
2. (a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
   (b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$,
   $$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$
3. (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\ .$$
   (b) Donner une interprétation combinatoire de l'égalité précédente.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Calculer le nombre de parties de E.
5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 13. Déterminer les extrema des ensembles qui suivent.

$$A = \{\ |xy| \mid x \in [-1,1] \text{ et } y \in [2,3]\ \}\,; \qquad B = \{\ |x+3y| \mid x \in [0,1] \cup [5,6] \text{ et } y \in [-3,-2]\ \}\,;$$

$$C = \{\ xy \mid x \in [-1,1] \text{ et } y \in [3,4]\ \}\,; \qquad D = \left\{ -y(x^2+1) \,\middle|\, x \in [-1,0] \text{ et } y \in [-2,-1] \cup [3,4] \right\};$$

$$E = \left\{ \frac{x^2+1}{y^2+3} \,\middle|\, x \in [-1,2] \text{ et } y \in [2,3] \right\}; \quad F = \left\{ \frac{x^3+1}{y^4+1} \,\middle|\, x \in [-2,2] \text{ et } y \in [-1,3] \right\}.$$

Exercice 14. Donner les parties entières des nombres qui suivent : 2 ; $3{,}7$; $-0{,}5$; $\dfrac{27}{13}$; $-\dfrac{17}{3}$; $\sqrt{13}$.

Exercice 15. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $x = 2\pi k + \theta$.

Exercice 16. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. On définit $E = \{\ n \in \mathbf{N} \mid 2^n \leq x\ \}$.
Montrer que E possède un maximum et que $\max E = \left\lfloor \dfrac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

Exercice 17.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \varepsilon .$$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\left|(1+e^{-n}) - 1\right| \leq \varepsilon .$$
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\left|(1+e^{-n})\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \varepsilon .$$
4. Pour tout $R \in \mathbf{R}$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\frac{n}{2} \geq R .$$

Exercice 18.

1. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
3. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^\star$, on a : $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.

Exercice 19. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{N}^\star$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a
$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq x < \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} + \frac{1}{a^k} .$$
2. En déduire que $\left(\dfrac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a
$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq \frac{\lfloor a^{k+1} x \rfloor}{a^{k+1}} .$$

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes.
Montrer que la suite $(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

Exercice 21. Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n) = \left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$
2. $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\left(n - \dfrac{1}{n}\right) - n^2\right)$
3. $(u_n) = \left(\left(n + \dfrac{2}{n^2}\right)^3 - n^3\right)$
4. $(u_n) = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$
5. $(u_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$
6. $(u_n) = \left(\frac{2n^6+5n+1}{n^6-1}\right)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}}$.

Exercice 22. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} .$$