Feuille d'exercices n° 1

Trigonométrie hyperbolique, fonctions réciproques

1 Trigonométrie hyperbolique

Exercice 1.1. Montrer les formules suivantes, valables pour tous réels x, y :

1. $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(y) = \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(y) = \mathrm{ch}(x+y)\ \mathrm{ch}(x-y)$,
2. $\mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2\ \mathrm{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right) \mathrm{ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
3. $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(y) = 2\ \mathrm{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)$,
4. $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$.

Exercice 1.2. Résoudre le système : $\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 3 \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2 \end{cases}$

Exercice 1.3. Calculer $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :

$$2\ \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \sqrt{3}\ \mathrm{ch}(5x).$$

Exercice 1.4. Résoudre l'équation différentielle $y'\ \mathrm{ch}(t) + y\ \mathrm{sh}(t) = 0$, dans laquelle l'inconnue est la fonction y, fonction dérivable d'une variable réelle notée t.

Exercice 1.5.

Soit u un réel. Exprimer $\mathrm{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u.

Même question avec $\mathrm{sh}^4(u)$.

2 Fonctions réciproques

Exercice 1.6. Calculer les expressions suivantes :

a. $\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b.** $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **c.** $\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ **d.** $\mathrm{Argch}\left(\mathrm{ch}(1-\ln 5)\right)$

e. $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ **f.** $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$ **g.** $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{82\pi}{11}\right)\right)$.

Exercice 1.7. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression plus simple de chacune des restrictions de f aux trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.

Exercice 1.8.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x, on ait l'identité $16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2+1)P(x)$ et expliciter ce polynôme.
2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \operatorname{Argsh}(3x + 4x^3)$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
   (b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 1.9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u) = 3\operatorname{ch}(u) - 4$ et soit g la fonction définie par $g(u) = \operatorname{Arcsin}(3\operatorname{ch}(u) - 4)$.

1. Montrer que pour tout réel u, on a : $u \in [-\ln 3; \ln 3] \Leftrightarrow f(u) \in [-1;1]$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de g, et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3. En précisant son domaine de validité, démontrer la formule suivante : $g'(u) = \dfrac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3\big(\operatorname{ch}(u)-1\big)\big(5-3\operatorname{ch}(u)\big)}}$.
4. Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité. (Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, écrire $\operatorname{sh}(u)$ et $\operatorname{ch}(u)$ en fonction de $\operatorname{sh}(u/2)$ et $\operatorname{ch}(u/2)$.)
5. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Dresser le tableau de variations de g puis tracer sommairement son graphe.

Exercice 1.10. Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a + ib$ qui vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. En se penchant sur le triangle de sommets 0, a et $a + ib$, montrer que :

$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{b}{a}.$$

En déduire que le réel

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$$

est un argument du nombre complexe $(2+i)(5+i)(8+i)$. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire une expression simple de :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.$$

Exercice 1.11.

1. Montrer que $0 \leq \operatorname{Arcsin}\dfrac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13} \leq \dfrac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\dfrac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13}$.