Université LYON 1
L1 Mathématiques
Automne 2009

UE Math I Algèbre. Seq. 1
CONTROLE CONTINU 3
le 11 janvier 2010
(CORRIGE)

Pour commencer, voici un rappel de cours sur les racines $n-$ ièmes d'un nombre complexe $z \neq 0$.
Pour résoudre l'équation $w^n = z$ on passe en représentation trigonométrique

$$z = \mid z \mid e^{i\theta}, \quad w = \mid w \mid e^{i\phi}.$$

L'équation s'écrit alors

$$\mid w \mid^n e^{in\phi} = \mid z \mid e^{i\theta}$$

ce qui est équivalent à

$$\mid w \mid^n = \mid z \mid \text{ et il existe un entier } k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } n\phi = \theta + 2\pi k.$$

Les racines n-ièmes de z sont donc les complexes

$$w = \mid z \mid^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

En utilisant la division euclidienne, $k = qn + r$, $0 \leq r \leq n-1$, on observe

$$e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}} = e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i2\pi\frac{qn+r}{n}} = e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2\pi r}{n}} e^{i2\pi q} = e^{i\frac{\theta+2\pi r}{n}}.$$

Conclusion: il y a exactement n racines n-ièmes distinctes de $z \neq 0$. Elles sont données par

$$e^{i\frac{\theta+2\pi r}{n}}, \quad 0 \leq r \leq n-1.$$

<u>Question 1</u>

(1) Pour un entier $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, faire la liste des racines n-ièmes de -1 dans $\mathbf{C}$. (Précisez le nombre de ces racines.)

solution: $z = -1 = e^{i\pi}$, $\mid z \mid = 1, \theta = \pi$ et la liste des n racines $n-$ ièmes de -1 est

$$e^{i\frac{\pi(2r+1)}{n}}, \quad 0 \leq r \leq n-1.$$

(2) Représenter sur une figure les racines 6-ièmes de -1 dans $\mathbf{C}$.

Solution: Voici la liste des six racines 6−ièmes de −1:

$$e^{i\frac{\pi}{6}},\, e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\, e^{i\frac{5\pi}{6}},\, e^{i\frac{7\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{6}},\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,\, e^{i\frac{11\pi}{6}} = -e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Il s'agit des sommets de l'hexagone régulier dont l'un des sommets est i. Je vous laisse la figure.

(3) L'ensemble des racines n - ièmes de -1 est-il un groupe pour la multiplication complexe? (Justifiez votre réponse.)

solution: Non. Voici une justification: le fait que $e^{i\frac{\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ne soit pas une racine $n-$ième de -1 (car $(e^{\frac{2\pi i}{n}})^n = 1$) montre que la multiplication n'est pas une loi de composition interne. Voici une autre justification: observer que le neutre 1 n'est pas une racine n-ième de -1.

<u>Question 2</u>

(1) Résoudre l'équation

$$(z-1)^4 + (z+1)^4 = 0$$

pour $z \in \mathbf{C}$. (*On pourra écrire les solutions en fonction de nombres complexes sous la forme trigonométrique sans expliciter les parties réelles et imaginaires.*)

solution:
(1) C'est similaire à l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ traitée en exemple en amphi:
On commence par observer que 1 n'est pas solution. En divisant par $(z-1)^4$ il vient

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -1$$

i.e. le quotient $\frac{z+1}{z-1}$ est l'une des quatre racines 4- ièmes de -1. En notant w l'une de ces racines 4-ièmes, on observe

$$\frac{z+1}{z-1} = w \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-1}.$$

Conclusion: il y a quatre solutions données par

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad w \in \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\}.$$

(2) Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. En vous servant de la formule de Moivre, exprimer $cos\, 6\theta$ en fonction de $cos\, \theta$.

solution: c'est une application directe de la formule de Moivre et du binôme de Newton:

$$cos\, n\theta + i\, sin\, n\theta = (cos\, \theta + i\, sin\, \theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos^{n-k}\theta\, i^k\, sin^k\, \theta.$$

Pour $n = 6$ on obtient

$$cos\,6\theta = \binom{6}{0} cos^6\theta - \binom{6}{2} cos^4\theta\, sin^2\,\theta + \binom{6}{4} cos^2\theta\, sin^4\theta - \binom{6}{6} sin^6\theta$$

que l'on peut exprimer en termes de $cos\,\theta$ en utilisant $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$.

Question 3

Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on désigne par U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$ et par S_n l'ensemble des permutations (i.e. des bijections) de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(1) Quels sont les sous-groupes du groupe U_7 (pour la multiplication complexe)?

solution: Par Lagrange, le cardinal de tout sous-groupe est un diviseur de 7, dès lors il n'y a que deux sous-groupes $\{1\}$ et U_7.

(2) Quels sont les sous-groupes du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ pour l'addition?

solution: la loi d'addition est définie sur les classes de restes par

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}.$$

Par Lagrange, le cardinal de tout sous-groupe est un diviseur de 4 donc vaut $1, 2$ ou 4. On a les sous-groupes $\{\overline{0}\}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Reste à faire la liste des sous-groupes de cardinal 2: un tel sous-groupe doit contenir le neutre $\{\overline{0}\}$; il ne peut contenir $\overline{1}$, car il contiendrait alors $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$ et serait de cardinal au moins 3. De même, il ne peut contenir $\overline{3}$ car $\overline{3} + \overline{3} = \overline{6} = \overline{2}$. Par contre $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ est bien un sous-groupe de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

(3) Dresser la table d'addition du groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

solution: C'est une question de cours. La table s'écrit

$$\begin{array}{c|ccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}$$

(4) L'application $f : \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to U_6$ définie par

$$f(\overline{0}) = 1, \quad f(\overline{1}) = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad f(\overline{2}) = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

est-elle un morphisme de groupes? Quel est son noyau? Quelle est son image?

solution: C'est un morphisme: pour le voir il faut vérifier que pour toutes classes $\overline{a}, \overline{b}$ on a bien

$$f(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) \cdot f(\overline{b}).$$

Pour ce faire, il suffit de le vérifier pour les classes $\overline{1}$ et $\overline{2}$. Par exemple pour le cas $1, 2$ on a $f(\overline{1} + \overline{2}) = f(\overline{0}) = 1$ et $f(\overline{1}) \cdot f(\overline{2}) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}} = 1$. Idem pour $1, 1$ et $2, 2$.

Le noyau $Ker\, f = \{\bar{0}\}$ et l'image $Im\, f = U_3 \subset U_6$.

(5) Dans le groupe S_4 (pour la composition) on considère les permutations

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \tau_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculer $\pi = \tau_{12} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34}$
- Calculer π^4. En déduire que $\pi^{-1} = \pi^3$. La partie $\{id, \pi, \pi^2, \pi^3\}$ est-elle un sous-groupe de S_4?

solution:
- il s'agit de suivre l'image des entiers $1, 2, 3, 4$ par les applications successives en commençant par τ_{34}. On obtient

$$\begin{aligned} &1 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 3, \\ &3 \mapsto 4 \mapsto 4 \mapsto 4, \quad 4 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- en suivant les images successives des entiers $1, 2, 3, 4$ on voit que $\pi^4 = id$, que l'on peut écrire sous la forme

$$\pi^3 \circ \pi = \pi \circ \pi^3 = id.$$

Dès lors π^3 est la bijection réciproque de π.

- C'est bien un sous-groupe car (1) elle contient le neutre id, (2) elle contient les composées π^n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$: en effet, par division on a $\pi^n = \pi^{4q+r} = (\pi^4)^q \circ \pi^r = \pi^r, 0 \le r \le 3$ et (3) elle contient les réciproques de ses éléments car $\pi^4 = id$ donne $\pi^{-1} = \pi^3, (\pi^2)^{-1} = \pi^2, (\pi^3)^{-1} = \pi$ et bien sûr le neutre est son propre réciproque $id^{-1} = id$.