Université Lyon 1 | Automne 2008/2009
Math I Algèbre | Seq 2 (J. Melleray)

Contrôle Continu n° 1 - 30 Octobre 2009

Les calculatrices, téléphones portables, et tous les autres appareils électroniques sont **interdits***, ainsi que tous les documents.*
Le barême proposé, sur 16 *points, est fourni à titre indicatif et est susceptible d'être légèrement modifié.*
La qualité et la clarté de la démonstration seront prises en compte lors de la correction.

Exercice 1. (*2 pts*)
Sachant que $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer le reste de la division euclidienne de 96842 par 256.

Exercice 2. (*4 pts*).
Calculer le reste de la division de 100^{100} par 17.

Exercice 3. (*5 pts*)
(a) Lors d'un calcul, un étudiant a divisé un nombre n par 8 et a obtenu un reste égal à 4 ; il a aussi divisé n par 12 et a obtenu un reste égal à 3. Qu'en pensez-vous ?
(b) Pendant le même examen, un étudiant qui avait fini en avance, a divisé le millésime de l'année par 17 et a obtenu 16 pour reste ; il a aussi divisé le millésime par 12 et a obtenu un reste égal à 1. Sachant qu'après l'examen l'étudiant en question a pris un tramway à énergie électrique, en quelle année cela se passait-il ?

Exercice 4. (*5pts*).
(a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geq 1$ on a

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1).\prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}} + 1) \ .$$

(b) Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, les entiers $2^{2^n} + 1$ et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux.
Indication : on pourra utiliser (a) pour montrer que leur pgcd divise 2*, puis conclure.*
(c) En déduire une nouvelle preuve du fait qu'il existe une infinité de nombres premiers.