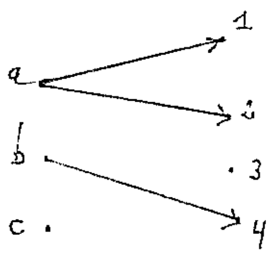
Université Lyon 1
Math I Algèbre
Automne 2009

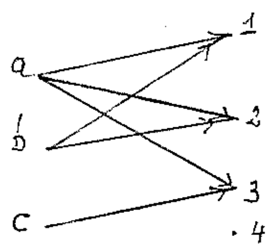
Applications

Une *relation* R d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie $\Gamma \subset E \times F$. C'est donc le choix d'une collection de couples (x, y), $x \in E$, $y \in F$.
Lorsque (x, y) est élément de Γ on dit que x est en relation avec y ce qui s'écrit

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma.$$

La partie Γ est appelée le *graphe* de la relation R.
Par exemple, la partie $\Gamma = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4)\}$ définit une relation R de $E = \{a, b, c\}$ vers $F = \{1, 2, 3, 4\}$. De même, la partie $\Gamma' = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ définit une autre relation R' de E vers F, etc.
On peut les représenter comme suit:

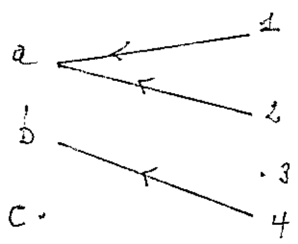


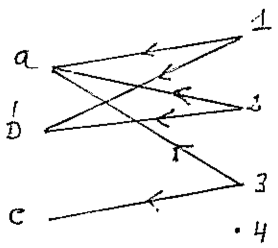


Lorsque R est une relation de E vers F on définit la relation réciproque R^{-1} de F vers E en posant

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy.$$

Pour les exemples plus haut, le graphe de R^{-1} est $\Gamma_{-1} = \{(1, a), (2, a), (4, b)\}$ et celui de ${R'}^{-1}$ est $\Gamma'_{-1} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, c)\}$ que l'on peut représenter en inversant l'orientation des flèches dans les diagrammes:

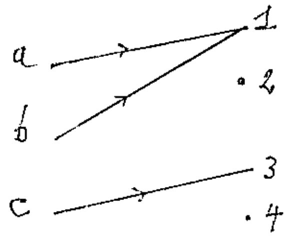




Une *application* f de E vers F est une relation très particulière: c'est une relation telle que pour tout $x \in E$ il y a exactement un couple (x, y) de première composante x dans Γ i.e. tout $x \in E$ est en relation avec un unique $y \in F$. Dans ce cas on note $y = f(x)$ au lieu de $x\, f\, y$, l'élément x est appelé un antécédent de y par f, y est appelé l'image de x par f et on utilise l'écriture

$$f : E \to F : x \mapsto f(x).$$

Exemple: Pour $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ la relation f de E vers F dont le graphe est $\Gamma_f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$ est une application que l'on représente par



contre-exemples: les relations R et R' ne sont pas des applications.

Egalité: Deux applications $f : E \to F$ et $f' : E' \to F'$ sont les mêmes (ce que l'on note simplement $f = f'$) si $E = E', F = F'$ et si pour tout $x \in E$, $f(x) = f'(x)$.

Exemples d'applications:
L'application identité: $id : E \to E : x \mapsto x$.
L'application $\mathbf{N} \to P(\mathbf{N}) : n \mapsto \{n\}$ qui à l'entier n associe le singleton d'élément n.
La projection sur le $i-$ème facteur d'un produit cartésien d'ensembles non vides

$$p_i : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \mapsto E_i : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i.$$

L'inclusion diagonale de E dans $E^n, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$:

$$\delta_n : E \to E^n : a \mapsto (a, a, \ldots, a).$$

L'application de passage au quotient d'entiers

$$\mathbf{Z} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\}) \to \mathbf{Q} : (m, n) \mapsto \frac{m}{n}.$$

Le logarithme népérien $ln : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R} : x \mapsto ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.
L'application réciproque du logarithme ln, i.e. l'exponentielle d'un réel $exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{>0} : x \mapsto exp(x)$.

Composition d'applications: la composée des applications $f : E \to E'$ et $f' : E' \to E''$ est l'application notée $f' \circ f : E \to E''$ définie pour tout $x \in E$ par

$$(f' \circ f)(x) = f'(f(x)).$$

La composition est associative: si $f : E \to E'$, $f' : E' \to E''$ et $f'' : E'' \to E'''$ sont trois applications, alors

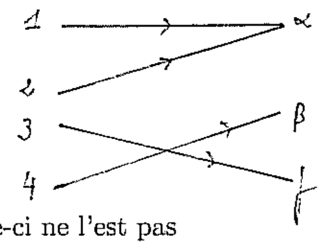
$$(f'' \circ f') \circ f = f'' \circ (f' \circ f).$$

Par contre la composition n'est pas commutative, i.e. pour deux applications $f : E \to E$ et $g : E \to E$ on n'a pas nécessairement $f \circ g = g \circ f$. Par exemple, si $E = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$ on a $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ i.e. $g \circ f \neq f \circ g$.

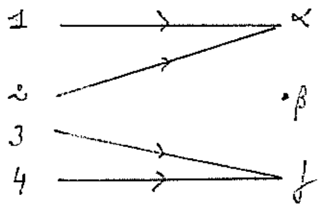
surjectivité: On dit que l'application $f : E \to F$ est *surjective* si tout élément de F admet *au moins* un antécédent.

Exemples et contre-exemples

Voici une application surjective $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$



Et celle-ci ne l'est pas

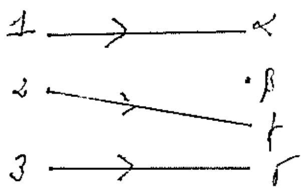


L'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ : x \mapsto x^2$ est surjective car tout réel positif r s'écrit $r = (\sqrt{r})^2$.
L'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas surjective car, par exemple, -1 n'est pas le carré d'un réel.
L'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto cos(2\pi x)$ n'est pas surjective: en effet, l'encadrement $-1 \leq cos(2\pi x) \leq +1$ montre qu'un réel $y \notin [-1, 1]$ ne s'écrit pas sous la forme $cos(2\pi x)$, $x \in \mathbf{R}$.
La continuité du logarithme ln et les propriétés $\lim_{x\to 0} ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} ln(x) = \infty$ montre que ln est surjective.
L'application de projection p_i (définie plus haut) est surjective.
L'inclusion diagonale $\delta : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n \mapsto (n, n)$ n'est pas surjective: en effet, les couples (a, b) pour lesquels $a \neq b$ n'admettent pas d'antécédents.

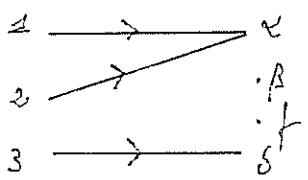
injectivité: on dit que l'application $f : E \to F$ est *injective* si tout élément de F admet *au plus* un antécédent.

Exemples et contre-exemples:

Voici une application injective $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$



Et celle-ci ne l'est pas



L'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective car $(-x)^2 = x^2$. Par contre l'application

$\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$ est injective.
L'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto cos(2\pi x)$ n'est pas injective car $cos(2\pi(x+1)) = cos(2\pi x)$.
Le logarithme ln étant strictement croissant, c'est une application injective.
L'application de projection $p_1 : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} : (m,n) \mapsto m$ n'est pas injective car, par exemple, quelquesoit $n \in \mathbf{N}, 0 = p_1(0,n)$ i.e. 0 admet une infinité d'antécédents.
L'inclusion diagonale $\delta : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n \mapsto (n,n)$ est injective.

Les exemples plus haut montrent que pour les applications usuelles d'une partie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, le caractère injectif ou surjectif d'une application se lit sur son graphe. Même une esquisse du graphe peut suffire: par exemple, pour l'application continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2(x-1)$ on a $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ dont résulte sa surjectivité. De plus étant négative pour $0 < x < 1$ et pour $x < 0$ on voit (sur son graphe) qu'elle ne peut être injective.

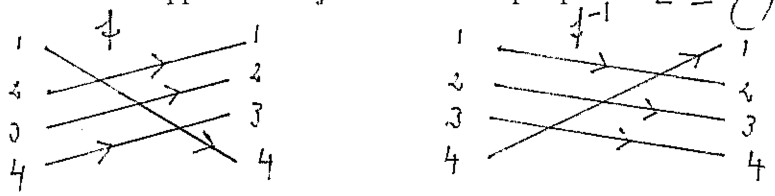
Ecriture de la surjectivité: $f : E \to F$ est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$ qui se lit quelquesoit l'élément y de F il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.

Ecriture de l'injectivité: $f : E \to F$ est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ qui se lit si les images par f des éléments x et x' de E sont égales alors ces éléments sont égaux.

Bijectivité: Une application $f : E \to F$ est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective i.e. si tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent par f ce qui s'écrit $\forall y \in E, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection: C'est l'application obtenue en inversant le sens des flèches dans le diagramme ci-dessus: l'application $f^{-1} : F \to E$ envoie $y \in F$ sur son unique antécédent $x \in E$ par f i.e. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Exemple: Voici une application bijective et sa réciproque: $E = \{1, 2, 3, 4\} = F$



Propriété: Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. Dans ce cas $g = f^{-1}$.
Démo: Dans un sens: Si f est bijective, il suffit de prendre pour g la réciproque $f^{-1} : E \to F$ de f.
Dans l'autre sens: supposons qu'une telle application g existe.
f est alors injective: en effet,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Leftrightarrow x = x'.$$

f est aussi surjective: en effet, pour tout $y \in F$ on a $y = id_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ i.e. $g(y) \in E$ est l'antécédent de y par f.
Enfin la condition $f \circ g = id_E$ donne $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1}$ i.e. $g = f^{-1}$.

Image directe d'une partie par une application: Soit $f : E \to F$ une application et $A \in P(E)$ une partie de E. L'image directe $f(A) \subset F$ de A par f est la partie de F dont les éléments sont les $f(a)$ pour $a \in A$. On peut l'écrire comme suit $f(A) = \{f(a)\, ,\, a \in A\}$ ou encore

$$f(A) = \{y \in F, \exists a \in A \text{ tel que } y = f(a)\}$$

D'une façon imagée $f(A)$ est l'ensemble des points de la cible F qui sont atteints par une flèche issue d'un point de A.

Image réciproque d'une partie par une application: On se donne cette fois une partie $B \in P(F)$. L'image réciproque (ou inverse) de B par f est la partie $f^{-1}(B)$ constituée des éléments de E dont l'image par f est dans B i.e.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \, , \, f(x) \in B\}.$$

Attention: dans cette définition on ne suppose pas f bijective i.e. on ne suppose pas l'existence de l'application réciproque f^{-1}.

Exemples:
Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$, on a $f^{-1}([1,2]) = [1, \sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2}, -1]$ et $f([1,2]) = [1,4]$.
Pour la projection $p_1 : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} : (m,n) \mapsto m$ on a $f(\mathbf{N} \times \{0\}) = \mathbf{N}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \mathbf{N}$.

Voici un exemple assez représentatif de propriété (et de démo) dans ce contexte:

Propriété: $f : E \to F$ est injective $\Leftrightarrow$ pour toutes parties A, B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

démo: Commencer par observer qu'on a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Passons à la démo.

$\Rightarrow$ On suppose f injective et il s'agit de montrer l' égalité ensembliste. On procède par contraposition i.e. on va montrer que
- s'il existe A et B telles que $f(A \cap B) \subset_{\neq} f(A) \cap f(B)$ alors f n'est pas injective -
en effet: si $f(A \cap B) \subset_{\neq} f(A) \cap f(B)$ alors il existe $c \in f(A) \cap f(B) \setminus f(A \cap B)$ i.e. il existe $a \in A, b \in B$ tels que $c = f(a) = f(b)$ avec $a \neq b$ (sinon $c \in f(A \cap B)$). f n'est donc pas injective (deux antécédents pour c).

$\Leftarrow$ Supposons l'égalité ensembliste vraie et appliquons la au cas où $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ avec $a \neq b$. On a $f(\{a\}) \cap f(\{b\}) = f(\{a\} \cap \{b\}) = f(\emptyset) = \emptyset$. Mais pour un singleton $f(\{x\}) = \{f(x)\}$. On a donc $\{f(a)\} \cap \{f(b)\} = \emptyset$ i.e. $f(a) \neq f(b)$. On vient de montrer $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ i.e. f est injective.