Devoir maison 2

Exercice 1 :

1°) Calculer le PGCD de 8303 et 2717 et donner l'identité de Bézout correspondante.

2°) En déduire le PPCM de 8303 et 2717.

3°) Calculer le PGCD de 1001 et 315 et donner l'identité de Bézout correspondante.

Correction

1°) $8303 = 3 \times 2717 + 152$; $2717 = 17 \times 152 + 133$; $152 = 1 \times 133 + 19$; $133 = 7 \times 19 + 0$.

$$19 = 152 - 1 \times 133 = 152 - 1 \times (2717 - 17 \times 152) = -1 \times 2717 + 18 \times 152$$
$$= -1 \times 2717 + 18 \times (8303 - 3 \times 2717) = 18 \times 8303 - 55 \times 2717$$

Et $D = PGCD(8303{,}2717) = 19$

2°) $M = \frac{8303 \times 2717}{19} = 1187329$

3°) $1001 = 3 \times 315 + 56$; $315 = 5 \times 56 + 35$; $56 = 1 \times 35 + 21$; $35 = 1 \times 21 + 14$; $21 = 1 \times 14 + 7$; $14 = 2 \times 7 + 0$.

$$7 = 21 - 1 \times 14 = 21 - 1 \times (35 - 1 \times 21) = -1 \times 35 + 2 \times 21 = -1 \times 35 + 2 \times (56 - 1 \times 35)$$
$$= 2 \times 56 - 3 \times 35 = 2 \times 56 - 3 \times (315 - 5 \times 56) = -3 \times 315 + 17 \times 56$$
$$= -3 \times 315 + 17 \times (1001 - 3 \times 315) = 17 \times 1001 - 54 \times 315$$

Exercice 2 :

Soit $\in \mathbb{N}^*$, est-ce que les nombres $2n$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux ?

Correction

Si $n = 1$, $2n = 2$ et $3n + 1 = 4$, ces deux nombres ne sont pas premiers entre eux donc les nombres $2n$ et $3n + 1$ ne sont pas toujours premiers entre eux.

La question était un peu ambigüe, on pouvait comprendre « y-a-t-il des nombres n telle que $2n$ et $3n + 1$ soient premiers entre eux » ou encore « pour quelles valeurs de n les nombres $2n$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux ? ». Donc je vais répondre à toutes ces questions.

On remarque que

$$2 \times (3n + 1) - 3 \times 2n = 2$$

Donc $d = PGCD(2n, 3n + 1)$ divise 2, leur PGCD est donc 1 ou 2.

Premier cas si $n = 2p + 1$, $2n = 4p + 2$ et $3n + 1 = 3(2p + 1) + 1 = 6p + 4$ donc 2 divise ces deux nombres, ils ne sont pas premiers entre eux.

Deuxième cas si $n = 2p$, $2n = 4p$ et $3n + 1 = 6p + 1$, les seuls diviseurs positifs possibles de ces deux nombres sont 1 et 2, or 2 ne divise pas $3n + 1 = 6p + 1$ donc leur seul diviseur commun est 1, ils sont premiers entre eux.

On aurait pu chercher une identité de Bézout entre $4p$ et $6p + 1$, mais c'est assez compliqué, je vous en donne une quand même : $(3p - 1)(4p) + (-2p + 1)(6p + 1) = 1$ (obtenu avec la méthode de Gauss), cela prouve aussi que le PGCD de $4p$ et $6p + 1$ est 1.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré d'un nombre impair égal à 1.

Correction

Soit $2n + 1$ un nombre impair.

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 8 \times \frac{n(n + 1)}{2} + 1$$

Comme on l'a déjà vu $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier (Si on n'est pas convaincu on fait le cas où n est pair et le cas où n est impair), l'égalité est donc la division euclidienne de $(2n + 1)^2$ par 8 car le reste 1 vérifie bien : $0 \leq 1 < 8$.

Le reste de la division de $(2n + 1)^2$ par 8 est 1.

Autre méthode :

n	1	3	5	7
n^2	1	$9 \equiv 1\ [8]$	$25 \equiv 1\ [8]$	$49 \equiv 1\ [8]$

Donc tout nombre impairs au carré est congru à 1 modulo 8, comme $0 \leq 1 < 8$ 1 est bien le reste de la division euclidienne de n^2 par 8. Je ne rajoute pas cela pour faire jolie car ces nombres sont aussi congru à 9 modulo 8 et 9 n'est pas le reste de la division euclidienne de n^2 par 8.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1°) $3x - 5y = 13$ 2°) $212x + 45y = 3$ 3°) $42x + 45y = 4$

Correction

1°) Une identité de Bézout entre 3 et 5 est $2 \times 3 - 5 = 1$, on multiplie cette égalité par 13 :

$$26 \times 3 - 13 \times 5 = 13$$

On soustrait $3x - 5y = 13$ et $26 \times 3 - 13 \times 5 = 13$:

$$3(x - 26) - 5(y - 13) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 26) = 5(y - 13)$$

D'après le théorème de Gauss, comme 3 divise $5(y - 13)$ et que 3 et 5 sont premiers entre eux, 3 divise $y - 13$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - 13 = 3k$, d'où $y = 13 + 3k$, on remplace cela dans $3(x - 26) = 5(y - 13)$, cela donne $3(x - 26) = 5 \times 3k \Leftrightarrow x - 26 = 5k \Leftrightarrow x = 26 + 5k$. Les solutions sont :

$$S = \{(26 + 5k, 13 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2°) Il faut d'abord trouver une solution particulière de $212x + 45y = 3$, pour cela on va écrire une équation de Bézout entre 212 et 45, ici c'est moins évident que dans le 1.

$212 = 4 \times 45 + 32$; $45 = 1 \times 32 + 13$; $32 = 2 \times 13 + 6$; $13 = 2 \times 6 + 1$; $6 = 6 \times 1 + 0$

$$1 = 13 - 2 \times 6 = 13 - 2 \times (32 - 2 \times 13) = -2 \times 32 + 5 \times 13 = -2 \times 32 + 5 \times (45 - 1 \times 32)$$
$$= 5 \times 45 - 7 \times 32 = 5 \times 45 - 7 \times (212 - 4 \times 45) = -7 \times 212 + 33 \times 45$$

On a $1 = -7 \times 212 + 33 \times 45$, on multiplie cette égalité par 3 : $3 = -21 \times 212 + 99 \times 45$

On soustrait cette égalité à $212x + 45y = 3$, on trouve

$$(-21 - x) \times 212 + (99 - y) \times 45 = 0 \Leftrightarrow 45(99 - y) = 212(21 + x)$$

D'après le théorème de Gauss, comme 45 et 212 sont premiers entre eux et que 45 divise $212(21 + x)$, 45 divise $21 + x$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $21 + x = 45k \Leftrightarrow x = -21 + 45k$, on remplace cette égalité dans $45(99 - y) = 212(21 + x)$, on trouve alors que :

$$45(99 - y) = 212 \times 45k \Leftrightarrow 99 - y = 212k \Leftrightarrow y = -212k + 99$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(-21 + 45k, 99 - 212k)\}$

3°) $42 = 3 \times 14$ et $45 = 3 \times 15$ donc le $(42,45) = 3$ or 4 n'est pas un multiple de 3, donc il n'y a pas de solution.

Exercice 5 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

Correction

$$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3 \times 3^n - 4^2 \times (4^4)^n = 27 \times 3^n - 16 \times (16 \times 16)^n \equiv 5 \times 3^n - 5 \times (5 \times 5)^n \quad [11]$$
$$\equiv 5 \times 3^n - 5 \times 25^n \quad [11] \equiv 5 \times 3^n - 5 \times 3^n \quad [11] \equiv 0 \quad [11]$$

Donc $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

Exercice 6 :

Montrer que 3 divise $a^3 - b^3$ si et seulement si 3 divise $a - b$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

Correction

Avec le petit théorème de Fermat, comme 3 est premier, $a^3 \equiv a \quad [3]$ et $b^3 \equiv b \quad [3]$,

$$a^3 - b^3 \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \quad [3]$$

Barème

Exercice 1 :

1°) 2 points

2°) 1 point

3°) 2 points

Exercice 2 :

1 point (il suffisait de trouver un contre exemple)

Exercice 3 :

3 points

Exercice 4 :

1°) 2 points

2°) 3 points

3°) 1 point

Exercice 5 :

3 points

Exercice 6 :

2 points