Correction : contrôle continu 1

Exercice 1 :

1°) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On posera $S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$

2°) En déduire la valeur de

$$T(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} k = (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1) + 2n$$

Correction

1°) On appelle (H_n) l'égalité $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$

Si $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$ sont égaux donc (H_1) est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = [1 + 2 + \cdots + n] + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right]$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc (H_n) entraine (H_{n+1}). L'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

On remarque que $S(2n) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) + \cdots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$

$$T(n) = S(2n) - S(n) = n(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = n\left[2n + 1 - \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Autre correction

$$T(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} k = (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1) + 2n$$
$$= [n + n + \cdots n + n] + [1 + 2 + \cdots + (n-1) + n] = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2 + n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(2n+n+1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Exercice 2 :

1°) Montrer par récurrence que pour $n \geq 0$, $a_n = 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.

2°) Soit $n \geq 0$, $b_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$, calculer $b_{n+1} - b_n$ et montrer que $b_{n+1} - b_n$ est un multiple de $225 = 15 \times 15$.

3°) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, b_n est un multiple de 225.

Correction

1°) $a_0 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ est un multiple de 15.

On appelle (H_n) : $n \geq 0$, $a_n = 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.

$a_0 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ est un multiple de 15. Donc (H_0) est vraie.

Si a_n est un multiple de 15, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que : $a_n = 4^{2n+2} - 1 = 15k_n$ alors

$$a_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 1 = 4^{2n+2} \times 4^2 - 1 = 16 \times 4^{2n+2} - 1 = 16(15k_n + 1) - 1 = 16 \times 15k_n + 15$$
$$= 15(16k_n + 1)$$

Donc a_{n+1} est un multiple de 15.

Donc (H_n) entraine (H_{n+1}).

Pour tout $n \geq 0$, $a_n = 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.

2°) $b_{n+1} - b_n = 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16 - [4^{2n+2} - 15n - 16] = 4^{2n+4} - 15n - 15 - 4^{2n+2} + 15n + 16 = 4^{2n+2}(4^2 - 1) - 15 = 15 \times 4^{2n+2} - 15 = 15(4^{2n+2} - 1)$

Or il existe k_n tel que $a_n = 4^{2n+2} - 1 = 15k_n$ donc $b_{n+1} - b_n = 15 \times 15k_n = 225k_n$

On en déduit que $b_{n+1} - b_n$ est un multiple de 225.

3°) On pose (H_n) pour tout $n \geq 0$, b_n est un multiple de 225

$b_0 = 4^{2\times 0+2} - 15 \times 0 - 16 = 4^2 - 16 = 0$ est un multiple de 225, en effet $0 = 0 \times 225$, (H_0) est vraie.

S'il existe $k'_n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n = 225k'_n$ alors $b_{n+1} - 225k'_n = 225k_n$ donc $b_{n+1} = 225(k_n + k'_n)$, ce qui signifie que b_{n+1} est un multiple de 225.

Donc (H_n) entraine (H_{n+1})

Pour tout $n \geq 0$, $b_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$ est un multiple de 225.