Contrôle continu 4
Math I algèbre
Durée 1 heure 30
Le 7 Janvier 2010

Exercice 1 :

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=0$$

1°) Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2°) Résoudre cette équation.
Correction
1°) On pose $X=a\in\mathbb{R}$

$$(1-i)a^3-(5+i)a^2+(4+6i)a-4i=0 \Leftrightarrow a^3-5a^2+4a+i(-a^3-a^2+6a-4)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-5a^2+4a=0 \\ -a^3-a^2+6a-4=0 \end{cases}$$
$$a^3-5a^2+4a=0 \Leftrightarrow a(a^2-5a^2+4)=0$$

Donc cette équation admet 0, 1 et 4 comme racine. Seul 1 est solution de $-a^3-a^2+6a-4=0$ donc il existe une unique solution réelle $a=1$.
2°) On factorise $(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i$ par $X-1$. Il existe alors α, β et γ telle que :

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=(X-1)(\alpha X^2+\beta X+\gamma)$$

Or $(X-1)(\alpha X^2+\beta X+\gamma)=\alpha X^3+(\beta-\alpha)X^2+(\gamma-\beta)X-\gamma$

On en déduit que : $\begin{cases} \alpha=1-i \\ \beta-\alpha=-(5+i) \\ \gamma-\beta=4+6i \\ -\gamma=-4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1-i \\ \beta=-(5+i)+1-i=-4-2i \\ \gamma=4+6i-4-2i=4i \\ \gamma=4i \end{cases}$

D'où

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=0 \Leftrightarrow (X-1)\big((1-i)X^2-(4+2i)X+4i\big)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ (1-i)X^2-(4+2i)X+4i=0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est :

$$\Delta=(4+2i)^2-4(1-i)\times 4i=16+16i-4-16i-16=-4=(2i)^2$$

Les deux racines sont alors

$$X_1=\frac{4+2i-2i}{2(1-i)}=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{1^2+1^2}=1+i$$
$$X_2=\frac{4+2i+2i}{2(1-i)}=\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2(1+i)^2}{1^2+1^2}=2i$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{1,1+i,2i\}$.
Exercice 2 :
1°) Donner les solutions de :

$$u^4=-4$$

Sous forme algébrique et trigonométrique.
2°) Donner les solutions de :

$$(z+1)^4+4(z-1)^4=0$$

Sous forme algébrique.
Correction

$$u^4=-4 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^4|=|-4| \\ \arg(u^4)=\arg(-4)+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4=4 \\ 4\arg(u)=\pi+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u|=4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \\ \arg(u)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, \quad k\in\{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$u_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

$$u_1=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$$

$$u_2=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i=\overline{u_1}$$

$$u_3=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=1-i=\overline{u_0}$$

2°)

$$(z+1)^4+4(z-1)^4=0 \Leftrightarrow (z+1)^4=-4(z-1)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4=-4$$

On pose $u=\frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u.

$$u=\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow u(z-1)=z+1 \Leftrightarrow zu-u=z+1 \Leftrightarrow zu-z=u+1 \Leftrightarrow z(u-1)=u+1 \Leftrightarrow z=\frac{u+1}{u-1}$$

$$z_0=\frac{u_0+1}{u_0-1}=\frac{1+i+1}{1+i-1}=\frac{2+i}{i}=1-2i$$

$$z_1=\frac{u_1+1}{u_1-1}=\frac{-1+i+1}{-1+i-1}=\frac{i}{-2+i}=\frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$z_2=\frac{u_2+1}{u_2-1}=\frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1}=\overline{z_1}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$z_3=\frac{u_3+1}{u_3-1}=\frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1}=\overline{z_0}=1+2i$$

Exercice 3 :

1°) Donner les solutions complexes de $X^4=1$.

2°) Résoudre $X^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3°) Résoudre $X^8+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

Correction

1°) Les racines quatrième de l'unité sont $\{1,i,-1,-i\}$.

2°) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$X^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4=e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4|=\left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4)=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4=1 \\ 4\arg(X)=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|=1 \\ \arg(X)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}, \quad k\in\{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k\in\{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$
$$X_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$. Donc $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0$. Or
$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$
D'où les solutions :

$X = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

3°) On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est
$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$
Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

L'équation du second degré a alors deux solutions :
$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
Et
$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$
L'équation du huitième degré a pour solution :
$$\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\}$$
Autre solution
$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2 + jY + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2 + \frac{Y}{j} + 1 = 0$$
Les solutions de $T^2 + T + 1 = 0$ sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$ et $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Exercice 4 :

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$

1°) Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif

2°) Montrer que $(]0, +\infty[\times \mathbb{R},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Correction

1°) Si $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors $xx' \neq 0$ donc $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

La loi $*$ est une loi interne.

$$\begin{aligned}(x,y)*\big((x',y')*(x'',y'')\big)&=(x,y)*(x'x'',x'y''+y')=(xx'x'',x(x'y''+y')+y)\\&=(xx'x'',xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

Et

$$\big((x,y)*(x',y')\big)*(x'',y'')=(xx',xy'+y)*(x'',y'')=(xx'x'',xx'y''+xy'+y)$$

Donc la loi $*$ est associative.

Soit (a,b) tel que pour tout $(x,y)\in G$:

$$(a,b)*(x,y)=(x,y)=(x,y)*(a,b)$$

Ces égalités équivalent à :

$$(ax,ay+b)=(x,y)=(xa,xb+y)\Leftrightarrow\begin{cases}ax=x=xa\\ay+b=y=xb+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$$

Donc $(1,0)$ est l'élément neutre.

Soit $(x,y)\in G$, on cherche (x',y') tel que $(x,y)*(x',y')=(1,0)=(x',y')*(x,y)$

Ces égalités équivalent à :

$$(xx',xy'+y)=(1,0)=(x'x,x'y+y')\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1=x'x\\xy'+y=0=x'y+y'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{x}\\xy'+y=0=\dfrac{1}{x}y+y'\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{x}\neq 0\\y'=-\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

Le symétrique de (x,y) est $(\frac{1}{x},-\frac{y}{x})$.

Donc $(G,*)$ est un groupe.

Comme $(1,2)*(2,0)=(2,2)$ et que $(2,0)*(1,2)=(2,4)$ il est clair que ce groupe n'est pas commutatif.

2°) L'élément neutre de $(G,*)$, $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Soit $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $(x',y')\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Alors

$$(x,y)*\left(\frac{1}{x'},-\frac{y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(-\frac{y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'}\right)$$

Comme $\frac{x}{x'}>0$ alors $\left(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Donc $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.