Exercice 1 :
Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$
1°) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2°) Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3°) Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4°) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Correction
1°) $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2°) $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3°) $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4°) $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Exercice 2 :
Soit f une application de E vers E telle que pour toute partie A de E :
$$f\big(f(A)\big) = A$$
Montrer que f est surjective.

Correction
Pour $A = E$, $f(E) \subset E$ donc $f\big(f(E)\big) = f(E) \subset E$, or $f\big(f(E)\big) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$, par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Exercice 3 :
Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$
1°) Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2°) Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Correction

1°) Si g existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$, si n est impair $g(n) \notin \mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.

2°) Si h existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$
Soit h la fonction définie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par $h(2p) = p$ et $h(2p+1) = 0$ convient.

Exercice 4 :
Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
1. Montrer que $A\Delta B = \big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(B \cap \overline{A}\big) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :

a) Montrer que : $\overline{\big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(B \cap \overline{A}\big)} = \big(\overline{A} \cap \overline{B}\big) \cup (B \cap A)$
b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = \big(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\big) \cup \big(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\big) \cup \big(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\big) \cup (C \cap B \cap A)$
c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Correction

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \emptyset = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2. $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$,
$A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$
$A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$

3. a) $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right) = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap A\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A) = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (B \cap A) = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$

b) $(A\Delta B)\Delta C = \left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right)\Delta C = \left(\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right) \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)}\right) = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)\right)\right) = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)$

c) $(A\Delta B)\Delta\mathrm{C} = \left(C \cap \overline{A\Delta B}\right) \cup \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) = \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A\Delta B}\right) = C\Delta(A\Delta B)$
or $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = B\Delta A$ donc $(A\Delta B)\Delta\mathrm{C} = C\Delta(A\Delta B) = C\Delta(B\Delta A)$

d) $(C\Delta B)\Delta A = \left(C \cap \overline{B} \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{C} \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B \cap C) = A\Delta(B\Delta C)$, en changeant A et C.

e) $(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) or $C\Delta(B\Delta A) = A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).
Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.