Devoir Maison 7

Exercice 1 :

On appelle $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3=1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique)

2°) Montrer que $\bar{j}=j^2$

3°) Montrer que $j^{-1}=j^2$

4°) Montrer que $1+j+j^2=0$

5°) Calculer $\frac{1}{1+j}$.

6°) Calculer j^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Correction

1°) $X_k=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, avec $k\in\{0,1,2\}$.

$X_0=1, X_1=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=j, X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}$

2°) $\bar{j}=X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=j^2$

3°) $j^3=1$, puisque j est solution de $X^3=1$, donc $j\times j^2=1\Rightarrow j=\frac{1}{j^2}$.

4°) $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=\frac{0}{1-j}=0$ car $j\neq 1$ et $j^3=1$.

Autre solution $1+j+j^2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=0$

C'est moins bien car un résultat du cours est que la somme des racines n-ième de l'unité est nul, et, ici 1, j et j^2 sont les trois racines troisième de l'unité.

5°) $\frac{1}{1+j}=\frac{1}{-j^2}=-j$, car $1+j=-j^2$ et $\frac{1}{j^2}=j$.

6°) La division euclidienne de n par trois dit qu'il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$ tel que $n=3q+r$, donc $j^n=j^{3q+r}=(j^3)^q j^r=1^q j^r=j^r$, autrement dit si $n\equiv 0\ [3]$, $j^n=1$ si $n\equiv 1\ [3]$, $j^n=j$ et si $j\equiv 2\ [3]$ alors $j^n=j^2$.

Exercice 2 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^6=1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique), et exprimer ces solution en fonction de j.

2°) Montrer que $\mathcal{U}_6=\{z\in\mathbb{C}, z^6=1\}$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

3°) Déterminer les ordres possible des sous-groupes de $(\mathcal{U}_6,\times)$, en déduire tous les sous-groupes de $(\mathcal{U}_6,\times)$.

Correction

1°) $X_k=e^{\frac{2ik\pi}{6}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$

$X_0=1, X_1=e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-j^2, X_2=e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j, X_3=e^{\frac{3i\pi}{3}}=e^{i\pi}=-1,$

$X_4=e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2, X_5=e^{\frac{5i\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-j.$

2°) $1^6=1$ donc $1\in\mathcal{U}_6$

Soient $z_1\in\mathcal{U}_6$ et $z_2\in\mathcal{U}_6$, $z_1^6=1$ et $z_2^6=1$

$(z_1z_2^{-1})^6=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6=\frac{z_1^6}{z_2^6}=\frac{1}{1}=1$ donc $z_1z_2^{-1}\in\mathcal{U}_6$.

$(\mathcal{U}_6,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

3°) L'ordre des sous-groupes de $(\mathcal{U}_6,\times)$ divise l'ordre de $(\mathcal{U}_6,\times)$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\mathcal{U}_6$, soit 6. L'ordre des sous-groupes des $(\mathcal{U}_6,\times)$ sont d'ordre 1,2,3 ou 6.

Il y a un sous-groupe d'ordre 1 : $\{1\}$.

Il y a un sous-groupe d'ordre 6 : $\{1,-j^2,j,-1,j^2,-j\}=\mathcal{U}_6$.

Dans les sous-groupes d'ordre 2, il y a forcément 1 et un élément d'ordre 2, parmi $\{-j^2,j,-1,j^2,-j\}$ il n'y a que -1 qui soit d'ordre 2, il n'y a qu'un sous-groupe d'ordre 2 : $\{1,-1\}$.

Dans les sous-groupes d'ordre 3, il y a forcément 1 et deux éléments dont l'ordre divise 3, ce sont donc des éléments d'ordre 3.

j est d'ordre 3 (car $j^3=1$), le troisième éléments du sous-groupe est $j^{-1}=j^2$, $\{1,j,j^2\}$ est un sous-groupe d'ordre 3 de $(\mathcal{U}_6,\times)$.

j^2 est aussi un élément d'ordre 3 (car $(j^2)^3 = j^6 = (j^3)^2 = 1^2 = 1$), le troisième élément est j, on retombe sur le cas précédent.
$-j^2$ n'est pas d'ordre 3 car $(-j^2)^3 = -j^6 = -1 \neq 1$. $-j$ n'est pas d'ordre 3 car $(-j)^3 = -j^3 = -1 \neq 1$, -1 est d'ordre 2, donc n'est pas d'ordre 3. Il n'y a pas d'autre sous-groupe d'ordre 3.
Exercice 3 :
Montrer que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
Correction
$|1| = 1$ donc $1 \in \mathcal{U}$, soient $z_1 \in \mathcal{U}$ et $z_2 \in \mathcal{U}$ donc $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$

$$|z_1 z_2^{-1}| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$$

donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathcal{U}$, $(\mathcal{U},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.