Université Lyon 1 | Automne 2009/2010
Math I Algèbre | Seq 2 (J. Melleray)

Contrôle Continu n°3 – 8 Janvier 2010 – Durée : 1h

Les calculatrices, téléphones portables, et tous les autres appareils électroniques sont **interdits**.
Le barème proposé, sur 15 *points, est fourni à titre indicatif et est susceptible d'être légèrement modifié.*

Exercice 1. (*4 pts.*)

1. Donner le module et un argument de $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$ et $-\sin(x)+i\cos(x)$ (où x est un réel).
2. On définit $z_0 = 1+i\sqrt{3}$, $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \frac{z_0}{z_1}$. Donner le module et un argument de z_2, puis calculer z_2 sous forme $x+iy$ avec x et y réels. En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 2. (*4pts*)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + z + 2 - 2i = 0$.

Exercice 3. (*4 pts.*)
On considère la fonction $f\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} \ .$$

1. Trouver tous les points fixes de f, c'est-à-dire tous les z appartenant au domaine de définition de f et tels que $f(z) = z$.
2. Déterminer l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (*3 pts*)
On rappelle que $\mathbb{C}^*$ désigne l'ensemble des complexes non nuls ; sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ on définit une opération $*$ en posant

$$(a,b) * (a',b') = (aa', ab'+b) \ .$$

Montrer que $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe non commutatif ; donner son élément neutre.