Université Lyon 1 — Automne 2008/2009

Math I Algèbre — Seq 2 (J. Melleray)

Contrôle Continu n° 3 - Correction

Exercice 1.

1. On a $\dfrac{1-i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}$.

Par conséquent, un argument de $\dfrac{1-i}{2}$ est $-\pi/4$ et son module est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Comme on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ un argument de z^n est égal modulo 2π à n fois un argument de z, et que le module de z^n est égal au module de z à la puissance n, on en déduit que :

- Un argument de $\left(\dfrac{1-i}{2}\right)^2$ est $2.\dfrac{-\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$
- Le module de $\left(\dfrac{1-i}{2}\right)^2$ est $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

De même,

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/12} \ .$$

Par suite, $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 e^{i\pi/4}$. Le module de $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$ est donc $(\sqrt{2})^3$, et un argument est $\pi/4$.

Pour la dernière question, il faut utiliser un peu de trigonométrie : on a $\cos(\pi/2+x) = -\sin(x)$ et $\sin(\pi/2+x) = \cos(x)$. Par conséquent, $-\sin(x) + i\cos(x) = e^{i(\pi/2+x)}$; c'est donc le nombre complexe dont le module est 1 et un argument est $\pi/2 + x$.

2. En réutilisant les calculs de la question précédente, on voit que

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}e^{i\pi/12} \ .$$

Le module de z_2 est donc $\sqrt{2}$, tandis qu'un argument de z_2 est $\pi/12$.
Sous forme algébrique, on a :

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$$

Puisqu'on a vu que $z_2 = \sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \ .$$

Exercice 2.

Pour se simplifier la vie, on se ramène à un polynôme unitaire (en divisant par i ; autrement dit en multipliant par $-i$) ; on doit résoudre l'équation $z^2 - iz - 2 - 2i = 0$. On met ce polynôme sous forme canonique :

$$z^2 - iz - 2 - 2i = (z - \frac{i}{2})^2 - \frac{i^2}{4} - 2 - 2i = (z - \frac{i}{2})^2 - \frac{7}{4} - 2i \ .$$

Par conséquent, z est une solution de l'équation si, et seulement si, $z - i/2$ est une racine carrée de $7/4 + 2i$. On doit donc calculer les racines carrées de $7/4 - 2i$. Pour cela, on utilise la technique habituelle en cherchant ces racines carrées sous la forme $x + iy$; en identifiant partie réelle, imaginaire et module on obtient les informations suivantes : $x + iy$ est racine carrée de $7/4 + 2i$ si, et seulement si,

$$x^2 - y^2 = 7/4 \tag{1}$$

$$2xy = 2 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\sqrt{7^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{113}}{4} . \tag{3}$$

La deuxième équation nous dit que x et y sont de même signe ; en ajoutant la première ligne et la troisième, on obtient

$$2x^2 = \frac{7 + \sqrt{113}}{4}, \text{ ou encore } x^2 = \frac{7 + \sqrt{113}}{8} .$$

On en déduit que $y^2 = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{8}$. Puisque x et y sont de même signe, les deux racines carrées de $7/4+2i$ sont

$$\sqrt{\frac{7 + \sqrt{113}}{8}} + i\sqrt{\frac{-7 + \sqrt{113}}{8}} \text{ et } -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{113}}{8}} - i\sqrt{\frac{-7 + \sqrt{113}}{8}} .$$

Finalement, les solutions de notre équation sont

$$\frac{\sqrt{7 + \sqrt{113}}}{2\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-7 + \sqrt{113}}}{2\sqrt{2}}\right) \text{ et } -\frac{\sqrt{7 + \sqrt{113}}}{2\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-7 + \sqrt{113}}}{2\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 3.
1. Pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = z \Leftrightarrow z^2 - z = z + 1 \Leftrightarrow z^2 - 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = 2 .$$

Par conséquent, les points fixes de f sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.
2. Ici, on pourrait utiliser plusieurs techniques. Par exemple, on pourrait dire qu'un complexe est dans $\mathbb{R}$ si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, et on doit donc comprendre quand la partie imaginaire de $f(z)$ est égale à 0 ; pour cela on peut mettre $f(z)$ sous la forme $a + ib$ avec a, b réels. On écrit :

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2 - 1 + \overline{z} - z}{|z-1|^2} .$$

Par conséquent, $f(z) \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $z - \overline{z} = 2iIm(z) \in \mathbb{R}$, ou encore si, et seulement si $Im(z) = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$.
On aurait aussi pu utiliser le fait qu'un complexe est réel si et seulement si il est égal à son conjugué, ce qui nous donne que $f(z) \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = \frac{z+1}{z-1} .$$

Ceci est équivalent à

$$\overline{z}.z - \overline{z} + z - 1 = z\overline{z} + \overline{z} - z - 1$$

En simplifiant, on voit de nouveau que $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$, autrement dit, si et seulement si $f(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Vérifions d'abord que l'opération est associative : fixons trois couples (a_1, b_1), (a_2, b_2) et (a_3, b_3) dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et écrivons

$$(a_1, b_1)*((a_2, b_2)*(a_3, b_3)) = (a_1, b_1)*(a_2a_3, a_2b_3+b_2) = (a_1a_2a_3, a_1(a_2b_3+b_2)+b_3 = (a_1a_2a_3, a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1) .$$

$$((a_1,b_1)*(a_2,b_2))*(a_3,b_3) = (a_1a_2, a_1b_2+b_1)*(a_3,b_3) = (a_1a_2a_3, a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1) \ .$$

Les deux expressions ci-dessus sont égales, par conséquent l'opération $*$ est bien associative.
Cherchons s'il y a un élement neutre, et appelons (x,y) ses coordonnées ; on doit avoir $(xa, xb+y) = (a,b)$ pour tout couple dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, donc en regardant la première coordonnée on voit qu'on doit avoir $x=1$, puis on en déduit $y=0$. Vérifions donc que $(1,0)$ est un élément neutre pour $*$: pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on a

$$(1,0)*(a,b) = (1.a, 1.b+0) = (a,b) \text{ et } (a,b)*(1,0) = (a.1, a.0+b) = (a,b) \ .$$

On voit donc que $(1,0)$ est élément neutre pour $*$. Il nous reste à voir si tout élément a un inverse ; pour cela, fixons $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$; on cherche (x,y) tel que $(x,y)*(a,b) = (a,b)*(x,y) = (1,0)$. En regardant la première équation, on voit qu'on doit avoir $x = 1/a$, puis de $xb+y=0$ on tire $y = -bx = -b/a$. Notre candidat pour être un inverse est donc l'élément $(1/a, -b/a))$. Vérifions que cet élément est l'inverse de (a,b) :

$$(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \times (a,b) = (\frac{a}{a}, \frac{b}{a} - \frac{b}{a}) = (1,0) \ ;$$

$$(a,b)*(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (\frac{a}{a}, a(-\frac{b}{a})+b) = (1,0) \ .$$

On voit donc que tout élément de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ a un inverse pour $*$, par conséquent on a fini de démontrer que $(\mathbb{C}, *)$ est un groupe, de neutre $(1,0)$.
Reste à voir que $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, *)$ n'est pas commutatif. Pour cela, il nous suffit de trouver a, a', b, b' tels que

$$(a,b)*(a',b') \neq (a',b')*(a,b), \text{ c'est-à-dire } (aa', ab'+b) \neq (a'a, a'b+b') \ .$$

Par exemple, avec $a=1, b=1$ et $a'=2, b'=0$ on a

$$(a,b)*(a',b') = (2,1) \text{ et } (a',b')*(a,b) = (2,2) \ .$$