Université Claude Bernard
L3 Probabilités - 2022 – 2023

Mathématiques

TP 1 du 22 mars 2023

On rappelle que la commande `help` X permet d'obtenir une aide détaillée sur la commande X.

Exercice 1 Simulation et visualisation de lois discrètes

On commencera à importer quelques modules utiles :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import stats
```

On rappelle aussi que l'aide d'un module ou d'une fonction peut s'obtenir par la commande `help`.

1. À l'aide de la fonction `random.poisson` du package `numpy`, simuler un échantillon de taille $x_1, \cdots, x_{100}$ de réalisations i.i.d. de loi $\mathcal{P}(10)$.

2. Si $X \sim \mathcal{P}(10)$, d'après le cours, que vaut $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$? Représenter, pour $k = 0, \cdots, 20$, $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k. Comparer avec une représentation obtenue à l'aide de la fonction `stats.poisson.pmf` du package `scipy`

3. On suppose que $X_1, \cdots, X_n \sim_{i.i.d.} X$. D'après le cours, quand $n \to +\infty$, vers quoi converge, pour $k \in \mathbb{N}$, $\hat{p}_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i=k}$? Expliquer ce que fait le code suivant :

```
n =100
lam = 10
x = np.random.poisson(lam,n)
counts = np.bincount(x)
freq = counts/n
plt.figure()
plt.bar(range(21),stats.poisson.pmf(range(21),lam))
plt.plot(freq,color = "red",linewidth = 2)
plt.show()
```

   Transformer ce code en fonction (de n et λ), puis utiliser cette fonction pour modifier la taille de l'échantillon simulé, et observer ce qu'il se passe.

4. Soient X et Y indépendantes, avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Estimer, à l'aide d'une simulation, $\mathbb{P}(X + Y = 4)$, lorsque $\lambda = 1.4$, $\mu = 1.6$.

   On peut montrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Vérifier visuellement ce résultat, toujours pour $\lambda = 1.4$, $\mu = 1.6$

Exercice 2 Loi des grands nombres

Le but de cet exercice est de visualiser la loi forte des grands nombres. On se donne une suite de v.a. i.i.d. $(X_n)_{n\geqslant 1}$, et on s'intéresse au comportement asymptotique de

$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

en fonction de différents choix pour la loi de X_1.

1. (a) On suppose que X_n suit la loi uniforme dans l'intervalle $[0, 2]$. Utiliser la commande `np.random.uniform` pour générer un tableau `x` contenant les valeurs des v.a. $(X_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$, pour $N = 10^3$.
   (b) Générez un tableau `y` contenant les valeurs des v.a. $(Y_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$.
   (c) Visualisez le comportement de la suite $(Y_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ à l'aide de la commande `plt.plot(y)`. Qu'observe-t-on ?

2. On veut calculer numériquement l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}^+} x^5 e^{-x} \mathrm{d}x$.

   (a) Écrire I comme l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire dont on reconnaîtra la loi.

   (b) Proposer une façon d'évaluer numériquement I, à partir de simulations, en utilisant la loi des grands nombres. Comparer la valeur obtenue avec la valeur théorique.

3. Utiliser la même logique pour évaluer l'intégrale suivante :

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^{1} \cos\,\Big(z(x^2+y)\Big) e^{-x} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Exercice 3 Simulation et visualisation de lois continues

1. Simuler un échantillon $x_1, \cdots, x_{100}$ de 100 réalisations i.i.d. d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$ (de densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$) que l'on notera $\mathcal{E}(2)$. On fera bien attention à la paramétrisation de la loi exponentielle dans les packages utilisés, en regardant l'aide.

2. Représenter sur un graphe la densité d'une loi exponentielle de paramètre 2, ainsi qu'un histogramme des données simulées, obtenu avec $n = 10000$ réalisations.

3. On a vu en TD que si $X, Y \sim_{i.i.d.} \mathcal{N}(0,1)$, alors $Z = \frac{X}{Y}$ suit une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Illustrer cette propriété avec des simulations.

4. On a vu en TD que si $X, Y \sim_{i.i.d.} \mathcal{N}(0,1)$, alors $W = X^2 + Y^2$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Illustrer cette propriété avec des simulations.

Exercice 4 Quelques questions pour les plus rapides

1. Reprendre la question 1 de l'exercice 2, question 1, lorsque X_n suit la loi de $1/|V|$, où V suit la loi uniforme dans l'intervalle $[-1, 1]$. Qu'observe-t-on ?

2. Posons $n = 100$, et soit $X_1, \cdots, X_n \sim_{i.i.d} \mathcal{E}(1)$. Simuler 1000 réalisations de $Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. À quoi ressemble cette loi ?