Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques

Année universitaire 2022 – 2023 — PROBABILITES

Partiel du 1er mars 2023 - Durée : 1 heure 30

Les téléphones et les objets connectés et les documents sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1 (2+2=4 pts)

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,2]$, i.e. de densité $P_U(dx) = \frac{1}{2}1_{0\leq x\leq 2}\, dx$. Donner la loi des variables aléatoires :

1. $|U-1|$.
2. $1_{[0,1]}(U) + 1_{]1/2,3/2]}(U)$

Exercice 2 (2+2+2=6 pts)

Soit X de loi géométrique de paramètre 1/2, i.e. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et avec pour $k \geq 0$, $\mathcal{P}(X=k) = 2^{-(k+1)}$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement
$$\text{A := 'X est pair'.}$$
2. Calculer la probabilité de l'évènement
$$\text{B := 'X est divisible par 3'.}$$
3. Est-ce que A et B sont indépendants ?

Exercice 3 (2+2+1+1=6 pts)

Soit X une variable aléatoire de densité $\frac{1}{t^2}1_{t\geq 1}$.

1. Calculer la loi de $Y = X^2$.
2. Soient X_1, X_2 indépendantes de même loi que X. Calculer la loi de $T = \min(X_1, X_2)$.
3. Calculer $P(T \leq X_1)$.
4. Les variables T et X_1 sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 (4 × 1=4 pts) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, i.e. de densité $x \mapsto 1_{0\leq x\leq 1}$. Considérons la suite des variables aléatoires définies par $X_n = n1_{[0,1/n^2]}(X)$.
On rappelle qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge vers Y dans L^p, $p \geq 1$ si $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - Y|^p) = 0$.
Est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 :

1. Dans L^1 ?
2. Dans L^2 ?
3. En probabilité ?
4. Presque sûrement ?