Université Claude Bernard | Licence de Mathématiques
Année universitaire 2020 – 2021 | PROBABILITES

Partiel du 6 avril 2021 - Durée : 2 heures

Exercice 1 `Calcul de loi.`

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire de loi $P_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, e^{-|x|}\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
2. Donner l'espace d'arrivée de $Y = X^2$ et déterminer sa loi.
3. Soit Z une variable aléatoire ayant même loi que X et indépendante de X. Expliciter la loi du couple (Y, Z).

Exercice 2 `Loi de Pareto.`

Soit $\alpha, r > 0$. On considère la densité de Pareto

$$f_{\alpha,r}(x) = \alpha r^{\alpha} x^{-\alpha-1} 1_{]r,\infty[}(x)$$

1. On suppose que la variable X suit une loi de Pareto de paramètres (α, r). Donner les conditions sur (α, r) pour que l'espérance de X existe.
2. Même question pour la variance.
3. Déterminer la loi de $Y = \log(X/r)$.
4. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un échantillon de loi de Pareto de paramètres (α, r). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on pose $Y_i = \log(X_i/r)$. En déduire que la suite de variable aléatoire

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

converge presque sûrement vers une limite que l'on calculera (penser à passer au logarithme).

Exercice 3 `Calcul de loi, encore.`

Notations : pour $x \in \mathbf{R}_+$, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$.
Dans la suite, on désigne par X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

1. On pose $Y = [X]$ et $Z = X - Y$.
Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires réelles et que Z est intégrable quelque soit la loi de X.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X : \Omega \to [0, n[$ une variable aléatoire dont la loi a pour densité f_X.
   (a) Exprimer la loi de Y à partir de f_X.
   (b) Prouver que la loi de Z a une densité f_Z, que l'on peut exprimer sous la forme
   $$f_Z(z) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f_X(z+k) \Big) \mathbf{1}_{[0,1]}(z).$$
   (c) Que donnent (a) et (b) quand X est de loi uniforme sur $[0, n]$?

Exercice 4 `Convergences`

Dans cette exercice, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, quelconque. Soit (α_n) une suite de réels dans $]0, 1/2[$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire réelle Y_n sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que

$$P(Y_n = n) = P(Y_n = -n) = \alpha_n$$

et

$$P(Y_n = 1/\sqrt{2n}) = 1 - 2\alpha_n.$$

1. Calculer et tracer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n.
2. On supposer que la suite α_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Calculer la limite en loi de la suite de variables aléatoires (Y_n) que l'on notera Z.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite (α_n) pour que (Y_n) converge vers Z dans L^2, c'est à dire
   $$\lim_{n\to\infty} E((Y_n - Z)^2) = 0.$$
4. Soit $\epsilon > 0$, calculer $P(|Y_n - Z| \geq \epsilon)$.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite (α_n) pour que (Y_n) converge en probabilité vers Z.
6. Déterminer **une condition suffisante** sur la suite (α_n) pour que la suite (Y_n) converge presque sûrement vers Z.