

**FEUILLE DE TD 4**

Fonction de répartition, lois usuelles

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Exercice 1. Espérance et queue de la distribution** Soit  $Z$  une variable aléatoire positive.

Montrer que  $Z$  (resp.  $Z^2$ ) est intégrable si l'intégrale de gauche (resp. de droite) converge dans les égalités ci-dessous, en démontrant ces égalités :

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z \geq z) dz \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Z^2) = 2 \int_0^{+\infty} z \mathbf{P}(Z \geq z) dz.$$

**Exercice 2. Loi exponentielle**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbf{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x) dx, \quad \mathbf{P}_Y(dy) = \mu e^{-\mu y} 1_{\mathbb{R}_+}(y) dy,$$

avec  $\lambda > 0, \mu > 0$ .

1. Calculer leurs fonctions de répartition  $F_X$  et  $F_Y$ .
2. Déterminer la loi de  $Z := \min\{X, Y\}$ .
3. Calculer  $\mathbf{P}(Z = X)$ .
4. Déterminer la loi de  $S := X + Y$ . On pourra utilement traiter différemment les cas  $\lambda = \mu$  et  $\lambda \neq \mu$ .

**Exercice 3. Lois géométriques**

Soient  $X, Y$  deux v.a. indépendantes telles que  $X \sim \text{Geom}(p), Y \sim \text{Geom}(p'), p, p' \in ]0, 1[$ .

1. Calculer la loi de  $\min(X, Y)$ .
2. Cela vous rappelle-t-il une autre famille de variables aléatoires ?

**Exercice 4. Loi de Paréto** Etant donné un réel  $a > 0$ , on dit que  $X$  suit une loi de Paréto de paramètre  $a$  si  $X = \exp(Z)$  où  $Z$  suit une loi exponentielle de paramètre  $a$ .

1. (a) Montrer que la fonction de répartition de  $X$  est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

(b) En déduire que  $X$  admet une densité de probabilité  $f_X$  et en donner une expression.

2. Soit  $Y$  une v.a. de même loi que  $X$  et indépendante de  $X$ . Donner la loi de  $V = XY$ .

**Exercice 5. Loi de Paréto - bis** On considère  $X, Y$  deux v.a. indépendantes de loi de Paréto de paramètre  $a > 0$  (comme dans l'exercice ci-dessus).

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ 
  - (a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur  $a$  assurant que  $X$  admette un moment d'ordre  $k$  (rappel : on dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $k$  si  $|X|^k$  est intégrable).
  - (b) Sous cette condition, calculer ce moment d'ordre  $k$  (c'est-à-dire  $\mathbb{E}[X^k]$ ).

- Démontrer que la variable aléatoire  $W = \min(X, Y)$  suit encore une loi de Paréto dont on déterminera le paramètre.

**Exercice 6. Loi de Weibull, Loi de Gumbel**

Soit  $\lambda > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi

$$\mathbf{P}_X(dx) = \frac{2}{\lambda^2} x e^{-(x/\lambda)^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx.$$

On l'appelle la loi de Weibull de paramètre  $(2, \lambda)$ .

- Calculer sa fonction de répartition  $F_X$ . En déduire la probabilité  $\mathbf{P}(X^2 \leq 1)$ .
- Expliciter la loi de  $Y = X^2$ .
- Expliciter la loi de  $Z = -\log(X)$ .

**Exercice 7.**

Soit  $Z$  une variable aléatoire vérifiant pour tout  $x \geq 1$ ,  $\mathbf{P}(Z > x) = \mathbf{P}(Z < -x)$  et  $\mathbf{P}(|Z| > x) = x^{-2}$ . Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ .

**Exercice 8.**

Soit  $X$  une v.a. intégrable.

- Montrer que  $\mathbf{E}(|X| \mathbf{1}_{|X| > M})$  tend vers 0 quand  $M \rightarrow +\infty$ .
- Soit  $(\Lambda_n)$  une famille d'événements tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Lambda_n) = 0.$$

- Peut-on dire que la suite de variables aléatoires  $(\mathbf{1}_{\Lambda_n})_n$  converge vers 0 en probabilité ? Dans  $L^p$  ? Presque sûrement ?
- Montrer que, pour tout  $M > 0$  fixé, la limite de  $\mathbf{E}(|X| \mathbf{1}_{\Lambda_n} \mathbf{1}_{|X| \leq M})$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , est nulle.
- En déduire que  $\mathbf{E}(|X| \mathbf{1}_{\Lambda_n})$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 9. Loi exponentielle—encore**

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $X_1, X_2, \dots$  une suite i.i.d. de loi  $\text{Exp}(\lambda)$ .

- Calculer la loi de  $\lfloor X_1 \rfloor$ .
- Calculer la loi de  $\max_{i=1, \dots, n} X_i$ .
- Calculer la loi de  $\min_{i=1, \dots, n} X_i$ .
- Montrer que la suite de variables aléatoires  $(\min_{i \leq n} (X_i))_n$  converge en probabilité vers 0.
- En utilisant la monotonie de la suite  $(\min_{i \leq n} (X_i))_n$ , montrer que cette convergence a également lieu presque sûrement.