Université Claude Bernard
Année universitaire 2022 – 2023

Licence de Mathématiques
PROBABILITES

Correction de l'xamen du 24 mai 2023 - Durée : 2 heures

`Formulaire` : On rappelle la fonction caractéristique d'une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

On rappelle aussi que l'ensemble des variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 `Limite variables aléatoires`

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i. de loi

$$\mathbb{P}_n = \frac{C}{\sqrt{n}}(\delta_n + \delta_{-n}) + \big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)\delta_0.$$

où $C \geq 0$ est une constante.

1. Calculer la constante C pour que $\mathbb{P}_n$ soit une mesure de probabilité.
   La masse totale est égale à
   $$1 + \frac{2C-1}{\sqrt{n}}$$
   ainsi il faut que $C = 1/2$.
2. Calculer pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(\ln(|X_n| + 1))$.
   On a
   $$\mathbb{E}(\ln(|X_n| + 1)) = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}.$$
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.
   On a
   $$\Pr(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$
   donc (X_n) *converge en loi vers* 0.
4. Calculer $\mathbb{P}(X_n \geq n)$.
   On a
   $$\mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

5. En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas presque sûrement.
   On a d'après la question précédente que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq n) = +\infty.$$

   Donc puisque les variables sont indépendantes, par le lemme de Borel Cantelli, on a

$$\Pr(X_n \geq n, i.s.) = 1.$$

   Donc la suite ne peut pas converge presque sûrement puisque, infiniment souvent elle diverge vers l'infini.

Exercice 2 `Encore une limite !`

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ de même loi que $(Y, Z) \in \mathbf{R}^2$, de loi

$$\mathbb{P}\big((Y,Z) = (-1,-1)\big) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\big((Y,Z) = (1,1)\big) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big((Y,Z) = (1,-1)\big) = \frac{1}{4}.$$

1. Donner la loi de Y et de Z.
   la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On a

$$\mathbb{P}\big(Y = -1\big) = \mathbb{P}\big((Y,Z) = (-1,-1)\big) = 1/2,$$

   et

$$\mathbb{P}\big(Y = 1\big) = \mathbb{P}\big((Y,Z) = (1,-1)\big) + \mathbb{P}\big((Y,Z) = (1,1)\big) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

   la variable aléatoire Z est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On a

$$\mathbb{P}\big(Z = -1\big) = \mathbb{P}\big((Y,Z) = (-1,-1)\big) + \mathbb{P}\big((Y,Z) = (1,-1)\big) = 1/2 + 1/4 = 3/4,$$

   et

$$\mathbb{P}\big(Z = 1\big) = \mathbb{P}\big((Y,Z) = (1,1)\big) = 1/4.$$

2. Donner la loi de $\sqrt{Y^2 + Z^2}$.
   On a $\sqrt{Y^2 + Z^2} = \sqrt{2}$, donc la loi de $\sqrt{Y^2 + Z^2}$ est $\delta_{\sqrt{2}}$.
3. Calculer la moyenne et la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(Y, Z) \in \mathbf{R}^2$.
   On a

$$\mathbb{E}(Y,Z) = (\mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(Z)) = (0, -1/2)$$

   et

$$\Gamma_{(Y,Z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

   car $Var(Y) = 1$, $Var(Z) = 3/4$ et $\mathbb{E}(YZ) = 1/2$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires suivantes

$$\left(\sqrt{n}\Big(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mathbb{E}\big((Y,Z)\big)\Big)\right)_{n\geq 1}$$

converge en loi et identifier la loi limite.
Les variables (X_n) sont indépendantes, identiquement distribuées dans L^2 donc on peut appliquer le TCL en dimension 2, ainsi la suite converge vers une loi

$$\mathcal{N}(0,\Gamma_{(Y,Z)}).$$

5. La loi limite admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ? Si oui, donner la densité.
On a

$$\det\Gamma_{(Y,Z)}=1/2,$$

donc la matrice est inversible. Ainsi la loi limite admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue en dimension 2. On a

$$\Gamma_{(Y,Z)}^{-1}=\begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi sa densité est donc donnée par

$$f(y,z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1/2}}\exp\left(-\frac{3x^2/2-2xy+2y^2}{2}\right).$$

Exercice 3 `Un vecteur gaussien`

Soit (X_1,X_2,X_3) un vecteur gaussien *centré* dans $\mathbf{R}^3$ de matrice de covariances

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner la loi de X_1 et (X_1,X_2).
Dans un vecteur gaussien, les coordonnées ou une partie du vecteur sont des vecteurs gaussiens donc X_1 suit une loi gaussienne centrée de variance 3 et le couple (X_1,X_2) est un vecteur gaussien centré de matrice

$$\Gamma_{(X_1,X_2)}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Que peut-on dire des variables aléatoires (X_1,X_2) et X_3 ?
Les covariance entre (X_1,X_2) et X_3 sont nulles et (X_1,X_2,X_3) est un vecteur gaussien donc les ces variables sont indépendantes.

3. Soit $a \in \mathbf{R}$, le vecteur $(X_2, X_2 + aX_1)$ est-il un vecteur gaussien ?
Ce nouveau vecteur aléatoire est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien c'est donc un vecteur gaussien.
4. Donner la moyenne et la matrice de covariances du vecteur aléatoire $(X_2, X_2 + aX_1)$.
C'est bien entendu un vecteur centré et sa matrice de covariance est donnée par

$$\Gamma_{(X_2,X_2+aX_1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2+a \\ 2+a & 2+2a+3a^2 \end{pmatrix}$$

5. Trouver un réel $a \in \mathbf{R}$ tel que X_2 et $X_2 + aX_1$ soient indépendantes.
Puisque c'est un vecteur gaussien, il suffit de trouver a pour que $a + 2 = 0$ soit donc $a = -2$.
6. Le vecteur (X_1, X_2^2) est il un vecteur gaussien ?
Ben non car la seconde variable X_2^2 ne suit pas une loi gaussienne.

Exercice 4 `Calcul de loi`

Soit un couple de variables aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ de densité

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{4}{5}(1+xy)1_{[0,1]}(x)1_{[0,1]}(y).$$

1. Calculer les lois de X et de Y.
On intègre par rapport à la variable y et on trouve la densité de X,

$$f_X(x) = (\frac{4}{5} + \frac{2x}{5})1_{[0,1]}(x)$$

et de même pour la variable Y.
2. Calculer $\mathbb{E}\big(X1_{X<\frac{1}{2}}\big)$.
On a

$$\mathbb{E}\big(X1_{X<\frac{1}{2}}\big) = \int_0^{1/2} x(\frac{4}{5} + \frac{2x}{5})dx = 1/10 + 1/60.$$

3. X et Y sont-elles indépendantes ?
Ben non car la densité n'est pas un produit. Si elles étaient indépendantes on aurait

$$f_{X,Y}(x,y) = (\frac{4}{5} + \frac{2x}{5})1_{[0,1]}(x)(\frac{4}{5} + \frac{2y}{5})1_{[0,1]}(x)1_{[0,1]}(y).$$

ce qui n'est pas le cas.
4. Calculer la loi de $X+Y$, on pourra donner sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue sous forme d'intégrale.
Un peu plus compliqué !
Soit f une fonction test (mesurable bornée par exemple), on a par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(g(X+Y)) = \int\int g(x+y)\frac{4}{5}(1+xy)1_{[0,1]}(x)1_{[0,1]}(y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 g(x+y)\frac{4}{5}(1+xy)dxdy.$$

Posons $u = x + y$, on a alors

$$\mathbb{E}(g(X+Y)) = \int_{y=0}^{1} \int_{u=y}^{1+y} g(u)\frac{4}{5}(1+(u-y)y)dudy.$$

Par Fubini, et c'est ici qu'il faut faire attention,

$$\mathbb{E}(g(X+Y)) = \int_{u=0}^{1} g(u)\left(\int_{y=0}^{u} \frac{4}{5}(1+(u-y)y)dy\right)du + \int_{u=1}^{2} g(u)\left(\int_{y=u-1}^{1} \frac{4}{5}(1+(u-y)y)dy\right)du.$$

ainsi la densité de $X + Y$ est donnée par

$$f_{X+Y}(u) = \frac{4}{5}\left(\int_{y=0}^{u} \frac{4}{5}(1+(u-y)y)dy 1_{[0,1]}(u) + \int_{y=u-1}^{1} \frac{4}{5}(1+(u-y)y)dy 1_{[1,2]}(u)\right).$$