Examen du 23 mai 2022 - Durée : 2 heures

`Formulaire` : On rappelle la fonction caractéristique d'une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exercice 1 `Calcul de loi et convergences`

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est à dire de densité

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Calculs de loi
   (a) Calculer la loi de
   $$U = \frac{X_1}{X_2}.$$
   (b) En déduire
   $$P(U \in [1,2]).$$
   (c) Soit T une variable aléatoire réelle qui suit une loi de densité $f_T : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2} 1_{[0,\infty[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que $1/T$ suit aussi la même loi.
   (d) Montrer que la variable aléatoire $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
   (e) Donner la loi de la variable aléatoire
   $$V = [X_1],$$
   où, pour $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x (le plus grand entier inférieur à x).
2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = X_n^2$.
   (a) Calculer la loi de T_n et son espérance.
   (b) En déduire la convergence de la suite de variables aléatoires ci-dessous, et préciser la nature de cette convergence :
   $$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i \right)_n .$$
3. Convergences.
   On suppose que $\lambda = 1$ et on pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Calculer F_{Y_n}, la fonction de répartition de Y_n.

(b) En déduire la densité de Y_n, pour $n \geq 1$.

(c) Montrer que la suite $\left(\frac{Y_n}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers 1.

(d) Montrer que la suite $(Y_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge en loi et expliciter la limite.

Exercice 2 `Un vecteur gaussien`

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien *centré* dans $\mathbf{R}^2$ de matrice de covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$

1. Donner la loi de X_1.
2. Les variables X_1 et X_2 sont elles indépendantes ?
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2$, donner la loi de la variable aléatoire

$$Z = aX_1 + bX_2 + c.$$

4. Montrer que le vecteur (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien.
5. Calculer moyenne et la matrice de covariance du vecteur gaussien (Y_1, Y_2).
6. Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
7. Démontrer que la variable aléatoire X_1X_2 a la même loi que $\frac{1}{2}(X_1^2 - X_2^2)$.
   On pourra utiliser la formule suivante $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

Exercice 3 `Convergence`

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{-k} X_k.$$

1. Soit $n \geq 1$, calculer la loi de S_n.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.