Université Claude Bernard
Année universitaire 2022 – 2023

Licence de Mathématiques
PROBABILITES

Correction Partiel du 1er mars 2023 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 (2+2=4 pts)

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,2]$, i.e. de densité $P_U(dx) = \frac{1}{2}1_{0\le x\le 2}\ dx$. Donner la loi des variables aléatoires :

1. $|U-1|$.
2. $1_{[0,1]}(U) + 1_{]1/2,3/2]}(U)$

Correction :

1. On utilise la méthode usuelle avec ϕ fonction test continue bornée. On a l'égalité :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\phi(|U-1|)) &= \frac{1}{2}\int_0^2 \phi(|x-1|)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \phi(1-x)\ dx + \int_0^2 \phi(x-1)\ dx\Big).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $y = 1-x$ (respectivement $y = x-1$) dans chacune des intégrales on obtient deux fois la même chose, d'où :

$$\mathbb{E}\phi(|U-1|)) = \int_0^1 \phi(y)\ dy.$$

Donc $|U-1|$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$

2. Il faut discuter au cas par cas. A chaque fois la probabilité que U est dans un sous-intervalle de $[0,2]$ de longueur de $1/2$ est égale à la moitié de la longueur de l'intervalle donc $1/4$, par définition de la loi de U.
Appelons X la variable dont il faut déterminer la loi.

$$\begin{aligned}&U \in [0,1/2] \Rightarrow X = 1+0 = 1.\\ &U \in]1/2,1] \Rightarrow X = 1+1 = 2.\\ &U \in]1,3/2] \Rightarrow X = 0+1 = 1.\\ &U \in]3/2,2] \Rightarrow X = 0+0 = 0.\end{aligned}$$

En récapitulant, la loi demandée est :

$$\frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2.$$

Exercice 2 (2+2+2=6 pts)

Soit X de loi géométrique de paramètre 1/2, i.e. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et avec pour $k \geq 0$, $\mathcal{P}(X = k) = 2^{-(k+1)}$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement

$$\text{A := 'X est pair'.}$$

2. Calculer la probabilité de l'évènement

$$\text{B := 'X est divisible par 3'.}$$

3. Est-ce que A et B sont indépendants ?

Correction :

1.
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \sum_{\text{k pairs}} 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} 2^{-2n} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} 4^{-n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/4} = 2/3.$$

2. De même :
$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2^3} = 4/7.$$

3. La probabilité de $A \cap B$ est celle que X soit divisible par 6. Comme avant, elle vaut
$$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2^6} = 32/63.$$

   Cette probabilité n'est pas égale au produit de celles de A et B donc les évènements ne sont pas indépendants.

Exercice 3 (2+2+1+1=6 pts)

Soit X une variable aléatoire de densité $\frac{1}{t^2} 1_{t \geq 1}$.

1. Calculer la loi de $Y = X^2$.
2. Soient X_1, X_2 indépendantes de même loi que X. Calculer la loi de $T = \min(X_1, X_2)$.
3. Calculer $P(T \leq X_1)$.
4. Les variables T et X_1 sont-elles indépendantes ?

Correction : On utilise la méthode usuelle avec ϕ fonction test continue bornée pour les deux premiers sous-exercices.

1. En faisant le changement de variables $t = \sqrt{y},\ dt = dy/2\sqrt{y}$ on a :

$$\mathbb{E}\phi(Y) = \int_{t=1}^{\infty} \phi(t^2)\frac{dt}{t^2} = \int_{y=1}^{\infty} \phi(y)\frac{dy}{2y^{3/2}}$$

donc

$$d\mathbb{P}_Y(y) = \frac{1}{2y^{3/2}} 1_{y\geq 1}\ dy.$$

2. En utilisant Fubini et l'indépendance de X_1, X_2 on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\phi(T) = \int_{x_1=1}^{\infty}\int_{x_2=1}^{\infty} \phi(\min(x_1,x_2))\ \frac{dx_1}{x_1^2}\ \frac{dx_2}{x_2^2} \\
&= \int_{x_1=1}^{\infty}\int_{x_2=1}^{x_1} \phi(x_2)\ \frac{dx_1}{x_1^2}\ \frac{dx_2}{x_2^2} + \int_{x_1=1}^{\infty}\int_{x_2=x_1}^{\infty} \phi(x_1)\ \frac{dx_1}{x_1^2}\ \frac{dx_2}{x_2^2} \\
&= \int_{x_1=1}^{\infty}\Big(\int_{x_1=x_2}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1^2}\Big)\phi(x_2)\frac{dx_2}{x_2^2} + \int_{x_2=1}^{\infty}\Big(\int_{x_2=x_1}^{\infty} \frac{dx_2}{x_2^2}\Big)\phi(x_1)\frac{dx_1}{x_1^2}.
\end{aligned}$$

On a deux fois la même intégrale donc :

$$\mathbb{E}\phi(T) = 2\int_{b=1}^{\infty}\Big(\int_{a=b}^{\infty}\frac{da}{a^2}\Big)\frac{\phi(b)}{b^2}db = \int_{b=1}^{\infty}\frac{2}{b^3}\phi(b)db.$$

Donc

$$d\mathbb{P}_T(b) = \frac{2}{b^3}1_{b\geq 1}\ db.$$

3. Par définition de T on a toujours $T \leq X_1$: la probabilité vaut 1.
4. Les deux évènements ne sont pas indépendants. Par exemple :

$$\mathcal{P}(T\leq 2, X_1\leq 2) = \mathcal{P}(X_1\leq 2) \neq \mathcal{P}(T\leq 2)\mathcal{P}(X_1\leq 2)$$

car $\mathcal{P}(X_1\leq 2) > 0$ et $\mathcal{P}(T\leq 2) < 1$.

Exercice 4 (4×1=4 pts) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, i.e. de densité $x \mapsto 1_{0 \leq x \leq 1}$. Considérons la suite des variables aléatoires définies par $X_n = n 1_{[0,1/n^2]}(X)$.
On rappelle qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de variables aléatoires converge vers* Y *dans* L^p, $p \geq 1$ *si* $\lim_{n \to \infty} E(|X_n - Y|^p) = 0$.
Est-ce que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 :

1. Dans L^1 ?
2. Dans L^2 ?
3. En probabilité ?
4. Presque sûrement ?

Correction : Pour les deux premiers sous-exercices, on utilise la formule de transfert.

1. La distance dans L_1 entre X_n et 0 vaut :

   $$\mathbb{E}|X_n - 0| = \int_0^1 n 1_{[0,1/n^2]}(x) dx = 1/n \to_{n \to +\infty} 0$$

   donc on a convergence dans L_1.
2. La distance dans L_2 entre X_n et 0 vaut :

   $$\mathbb{E}|X_n - 0|^2 = \int_0^1 n^2 1_{[0,1/n^2]}(x) dx = 1 \not\to_{n \to +\infty} 0$$

   donc on n'a pas convergence dans L_2.
3. Par l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$,

   $$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{\epsilon} = \frac{1}{n\epsilon} \to_{n \to +\infty} 0.$$

   Alternativement : On se sert de la réponse de l'exercice suivant car convergence presque sûre implique convergence en probabilité.
4. Presque sûrement on a $X > 0$, donc $X > 1/n$ à partir d'un certain rang n, donc $X_n = 0$ à partir d'un certain rang n. On a donc bien convergence presque sûre vers 0.