1ère méthode :

On rappelle le lemme suivant : Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ et $f \in L^1(\mu)$. Alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \varepsilon$.

Corollaire : Soit X une v.a.r admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue dx. Alors F_X est continue.

En effet si $t \geq s$, alors

$$F_X(t) - F_X(s) = P_X(]s,t]) = \int_{]s,t]} dP_X = \int_{]s,t]} f(x)dx.$$

D'après le résultat précédent $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq si $|t-s| \leq \delta$ alors $0 \leq F_X(t) - F_X(s) \leq \varepsilon$

Ainsi F_X est uniformément continue. Ce résultat est possible car $|t-s| = \int_{]s,t]} dx$.

2ème méthode : Voir le cours. On a montré que F_X est càdlàg donc il suffit de montrer que F_X est continue à gauche : $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_X(t) = F_X(t_0)$.

Or on a $F_X(t_0) - \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_X(t) = P(X = t_0) = 0$

car X est à densité.