Université Claude Bernard
Année universitaire 2022 – 2023

Licence de Mathématiques
PROBABILITES

Partiel du 5 avril 2023 - Corrigé

Exercice 1. *Soit λ un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0 \le x \le y}$$

et on admet que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires dont la loi est donnée par

$$d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = f(x,y)\ dx\ dy.$$

1. *Montrer que $\mathbb{P}(X \ge 0) = 1$.*
   On admet que l'on a aussi $\mathbb{P}(Y \ge 0) = 1$.
2. *Montrer que X suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.*
3. *Déterminer la densité de la loi de Y.*
4. *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*
5. *Montrer que, pour tout réel α de $[1, +\infty[$, on a $\mathbb{P}(\alpha X \le Y) = \dfrac{1}{\alpha}$.*
6. *Montrer que, pour tout réel α de $[0,1]$, on a $\mathbb{P}(\alpha X \le Y) = 1$.*
7. *On note $Z = Y - X$. Déterminer la densité φ de la loi du couple (X,Z).*
8. *Montrer que X et Z sont indépendantes et déterminer la loi de Z.*

Correction

Soit λ un réel strictement positif.

1. X et Y sont des variables aléatoires à valeurs positives : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$. On a en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \le 0) &= \mathbb{P}(X \le 0, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{x \le 0} \int_{y \in \mathbb{R}} f(x,y)\ dx\ dy \\ &= 0\end{aligned}$$

   car $f(x,y)$ est nul pour tout x strictement négatif.
   En passant au complémentaire, on obtient que $\mathbb{P}(X \ge 0) = 1$.
   De même, $\mathbb{P}(Y \ge 0) = 1$.

2. On calcule la densité de la loi de X : le couple (X,Y) est de densité f, donc X admet une densité, que l'on note g_X et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy.$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si x est strictement négatif, alors, pour tout réel y, $f(x,y) = 0$, donc $g_X(x) = 0$.

Supposons $x \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} g_X(x) &= \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\ dy \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dy \\ &= \int_{y=x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\ dy \\ &= \lambda e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

X est donc de densité $g_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$. On reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

3. De même, (X,Y) est de densité f donc Y est de densité notée g_Y avec

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$.
Si y est strictement négatif, alors, pour tout réel x, $f(x,y) = 0$, donc $g_Y(y) = 0$.
Soit $y \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\ dx \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y}\int_0^y\ dx \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

La densité de la loi de Y est donc $y \mapsto \lambda\, y\, e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{y\geq 0}$.

4. On constate que $\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$, $\mathbb{P}(Y \leq 1) > 0$ mais

$$\mathbb{P}(X \geq 2, Y \leq 1) = \int_2^{+\infty}\int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy = 0$$

car f est nulle sur $[2, +\infty[\times[0,1]$.
Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Soit $\alpha \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha X \leq Y) &= \iint_{\alpha x\leq y} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dx\ dy \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\alpha x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dy\right)\ dx \\ &= \int_0^{+\infty} \big[-\lambda e^{-\lambda y}\big]_{\alpha x}^{+\infty}\ dx \text{ car si } y \geq \alpha x \text{ alors } y \geq x \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda\alpha x}\ dx \\ &= \left[\frac{\lambda}{-\lambda\alpha}e^{-\lambda\alpha x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

6. Soit $\alpha \in [0,1]$.

   On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\alpha X \le Y) &= \iint_{\alpha x \le y} f(x,y)\ dx\ dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0 \le \alpha x \le x \le y}\ dx\ dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dx\ dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

7. Soit $Z = Y - X$.

   Pour déterminer la loi de Z, on utilise une fonction test (ou fonction muette) : soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et bornée. Alors $h(X,Z)$ est mesurable et bornée donc c'est une variable aléatoire intégrable et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X,Z)) &= \mathbb{E}(h(X, Y-X)) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y-x) d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y-x) f(x,y)\ dx\ dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y-x) \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0 \le x \le y}\ dx\ dy
\end{aligned}$$

   On effectue le changement de variables $t = x,\ z = y - x$, ie $x = t, y = z + t$. C'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et son jacobien est égal à 1.

   On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X,Z)) &= \iint_{\mathbb{R}^2} h(t,z) \lambda^2 e^{-\lambda(t+z)} \mathbf{1}_{0 \le t \le t+z} \times 1\ dt\ dz \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(t,z) \lambda^2 e^{-\lambda(t+z)} \mathbf{1}_{t \ge 0, z \ge 0}\ dt\ dz
\end{aligned}$$

   Le couple (X,Z) admet donc pour densité la fonction $\varphi : (x,z) \mapsto \lambda^2 e^{-\lambda(x+z)} \mathbf{1}_{x \ge 0, z \ge 0}$.

8. On constate, que, pour tout couple (x,z), on a

$$\varphi(x,z) = g_X(x) \times \lambda e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{z \ge 0}.$$

   Cette fonction est donc le produit d'une fonction de x et d'une fonction de z, donc les variables aléatoire X et Z sont indépendantes, et la fonction $z \mapsto \lambda e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{z \ge 0}$ est la densité de Z.

Exercice 2. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes indépendantes et de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = 1/2$. On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 2^{-k-1}$.*

On considère les variables aléatoires $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. *Montrer que, pour tout* $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$*, on a*

$$\mathbb{P}(U = k, V = \ell) = \begin{cases} 0 & si\ k > \ell \\ 2^{-2k-2} & si\ k = \ell \\ 2^{-k-\ell-1} & si\ k < \ell \end{cases}$$

2. *Calculer* $\mathbb{P}(U = V)$*.*
3. *Vérifier* $\mathbb{P}(V = 0) = 1/4$ *puis montrer que, pour tout entier naturel non nul* ℓ*, on a :*

$$\mathbb{P}(V = \ell) = 2^{-\ell} - 3 \times 2^{-2\ell-2}.$$

4. *Les variables aléatoires* U *et* V *sont-elles indépendantes ?*
5. *Justifier que, pour tout* $x \in]-1, 1[$*, on a* $\sum_{\ell \geq 1} \ell x^\ell = \frac{x}{(1-x)^2}$*.*
6. *Calculer, si elle existe, l'espérance de* V*.*

Correction

1. Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.
   Si $k > \ell$, l'événement $\{U = k, V = \ell\}$ est l'ensemble vide, donc $\mathbb{P}(U = k, V = \ell) = 0$.
   Sinon, on a

$$\{U = k, V = \ell\} = (\{X = k\} \cap \{Y = \ell\}) \cup (\{X = k\} \cap \{Y = \ell\})$$

   et ces deux événements sont égaux si $k = \ell$ et incompatibles si $k < \ell$.
   On a donc, si $k = \ell$, $\mathbb{P}(U = k, V = k) = \mathbb{P}(X = k, Y = k)$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = k, V = k) &= \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) \\ &= 2^{-2k-2} \end{aligned}$$

   Et si $k < \ell$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = k, V = \ell) &= \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) + \mathbb{P}(X = \ell, Y = k) \\ &= \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = \ell) + \mathbb{P}(X = \ell) \times \mathbb{P}(Y = k) \\ &= 2^{-k-\ell-1} \end{aligned}$$

2. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = V) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U = V, U = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U = k, V = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-2k-2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{4}\ \frac{1}{1 - 1/4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. V est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On a $\mathbb{P}(V=0)=\mathbb{P}(X=0,Y=0)=1/4$.
   Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V=\ell) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(U=k,V=\ell) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell-1} \mathbb{P}(U=k,V=\ell) + \mathbb{P}(U=\ell,V=\ell) + \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} \mathbb{P}(U=k,V=\ell) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell-1} 2^{-k-\ell-1} + 2^{-2\ell-2} + 0 \\
&= 2^{-\ell-1}\frac{1-2^{-\ell}}{1-2^{-1}} + 2^{-2\ell-2} \\
&= 2^{-\ell} - 2^{-2\ell} + 2^{-2\ell-2} \\
&= 2^{-\ell} - 3\times 2^{-2\ell-2}
\end{aligned}$$

4. On a $\mathbb{P}(U=1,V=0)=0$, $\mathbb{P}(V=0)=1/4$ et $\mathbb{P}(U=1)\geq \mathbb{P}(U=1,V=1)>0$ donc $\mathbb{P}(U=1,V=0)\neq \mathbb{P}(U=1)\times\mathbb{P}(V=0)$.
   Les variables aléatoires U et V ne sont donc pas indépendantes.
5. On considère la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f : x\mapsto \sum_{\ell\geq 0} x^\ell$.
   Cette fonction est une série entière de rayon de convergence 1, donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
   On peut dériver la série terme à terme sur $]-1,1[$ et on obtient, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \sum_{\ell\geq 1} \ell x^{\ell-1}.$$

   On peut donc affirmer que, pour tout x de $]-1,1[$, la série $\sum_{\ell\geq 1} \ell x^\ell$ converge.
   On a par ailleurs pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=1/(1-x)$, donc $f'(x)=1/(1-x)^2$.
   On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\geq 1} \ell x^\ell &= x\times \sum_{\ell\geq 1} \ell x^{\ell-1} \\
&= xf'(x) \\
&= \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

6. On étudie la série $\sum_{\ell\geq 0} \ell\mathbb{P}(V=\ell)$.
   Cette série fait intervenir les deux séries $\sum_\ell \ell 2^{-\ell}$ et $\sum_\ell \ell 2^{-2\ell}$ qui sont toutes deux absolument convergentes, donc elle est également absolument convergente et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell \mathbb{P}(V=\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \times (2^{-\ell} - 3\cdot 2^{-2\ell-2}) \\
&= f'(1/2) - \frac{3}{4} f'(1/4) \\
&= \frac{1/2}{(1-1/2)^2} - \frac{3}{4}\frac{1/4}{(1-1/4)^2} \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 3. *Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On note, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \max(U_1,\dots,U_n)$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq t) = t^n$ et en déduire la densité de la loi de (M_n).*
2. *Montrer que (M_n) converge en probabilité vers 1.*
3. *Justifier la convergence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, de la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq k^{-1})$.*
4. *En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{\forall N, \exists n \geq N \text{ tel que } |M_n - 1| \geq k^{-1}\}$ est de probabilité nulle.*
5. *Conclure que $(M_n)_n$ converge presque sûrement vers 1.*
6. *Justifier que $(n(1-M_n))_n$ converge en loi vers une loi exponentielle. On pourra utiliser la fonction de répartition.*

Correction

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On note, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \max(U_1,\dots,U_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n \leq t) &= \mathbb{P}(\forall k \leq n, U_k \leq t) \\
&= \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n \{U_k \leq t\}) \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(U_k \leq t) \\
&= t^n
\end{aligned}$$

   La fonction de répartition de M_n est donc continue sur $\mathbb{R}$ et continument dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Donc M_n admet une densité, que l'on obtient en dérivant la fonction de répartition là où c'est possible.
   M_n admet donc pour densité $t \mapsto nt^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

2. Soit $\epsilon \in]0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq \epsilon) &= \mathbb{P}(M_n \leq 1-\epsilon \text{ ou } M_n \geq 1+\epsilon) \\
&= \mathbb{P}(M_n \leq 1-\epsilon) + \mathbb{P}(M_n \geq 1+\epsilon) \\
&= (1-\epsilon)^n + 0
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, cette probabilité tend vers 0, donc (M_n) converge en probabilité vers 1.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, k^{-1} est dans $]0,1]$, donc on peut appliquer le calcul de la question ci-dessus avec $\epsilon = k^{-1}$.

   On a ainsi, $\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq k^{-1}) = (1 - k^{-1})^n$.

   Or, la série de terme général $((1 - k^{-1})^n)_n$ est convergente car c'est une série géométrique dont la raison appartient à $[0, 1[$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_n \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq k^{-1})$ est donc convergente.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   On utilise le 1er lemme de Borel-Cantelli : la série $\sum_n \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq k^{-1})$ converge, donc l'événement
   $$\bigcap_N \bigcup_{n \geq N} \{|M_n - 1| \geq k^{-1}\}$$
   est de probabilité nulle.

   On a donc bien :
   $$\mathbb{P}\left(\forall N, \exists n \geq N \text{ tel que } |M_n - 1| \geq k^{-1}\right) = 0.$$

5. On en déduit que
   $$\mathbb{P}\left(\cup_k \{\forall N, \exists n \geq N, |M_n - 1| \geq k^{-1}\}\right) \leq \sum_k \mathbb{P}\left(\forall N, \exists n \geq N, |M_n - 1| \geq k^{-1}\right) = 0$$
   Donc, en passant au complémentaire,
   $$\mathbb{P}\left(\cap_k \{\exists N, \forall n \geq N, |M_n - 1| \leq k^{-1}\}\right) = 1$$
   Autrement dit : presque sûrement, pour tout k, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|M_n - 1| \leq 1/k$, ce qui signifie que, presque sûrement, (M_n) converge vers 1.

6. On étudie la convergence de la suite des fonctions de répartition de $n(1 - M_n)$.

   Soit x un réel positif.
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x) &= \mathbb{P}(1 - M_n \leq x/n) \\ &= \mathbb{P}(M_n \geq 1 - x/n) \end{aligned}$$
   x étant fixé, pour tout n assez grand, x/n est inférieur à 1 et on a donc
   $$\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}.$$
   Or, $n \ln(1 - x/n)$ tend vers $-x$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $(\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x))_n$ converge vers $1 - e^{-x}$.

   La suite des fonctions de répartition de $n(1 - M_n)$ converge donc vers la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

   $(n(1 - M_n))$ converge ainsi vers la loi exponentielle de paramètre 1.