Séance de Soutien du 24/03/2023 - Préparation au CP2

Objectif : Travail de groupe ou individuel, questions, ex. TD ou ex. de cette feuille.

CORRECTION

- **C1. Manipuler la définition de continuité d'une fonction**
- **D1. Manipuler la définition de différentiabilité d'une application**

Exercice 1 Fonction hölderienne

On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est 2-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\|_2 \leqslant C\|x - y\|_2^2$.

1. Montrer que toute fonction 2-höldérienne est continue.
2. Montrer que la différentielle d'une fonction 2-höldérienne est nulle en tout point.

Correction.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, alors pour $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 \leqslant C\|x - x_0\|^2 < C\delta^2 = \varepsilon,$$
et donc f est continue en x_0. Comme ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, f est continue sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, alors
$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_2}{\|h\|_2} \leqslant \frac{C\|x_0 + h - x_0\|_2^2}{\|h\|_2} = \frac{C\|h\|_2^2}{\|h\|_2} = C\|h\|_2.$$
Comme $\lim_{h \to 0} C\|h\|_2 = 0$, on obtient que
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_2}{\|h\|_2} = 0,$$
ce qui veut dire que f est différentiable en x_0 et $D_{x_0} f$ est nulle.

- **C2. Déterminer la limite d'une fonction en un point**
- **C3. Montrer la continuité d'une fonction en un point (inégalités)**
- **C5. Utiliser le théorème de la borne atteinte**

Exercice 2 **Limite d'un quotient**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   est continue.

2. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum sur E.

Correction.

1. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas car $x^2+y^2 = 0 \iff x = y = 0$.
   Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|x|^5+|y|^5}{x^2+y^2} \leqslant \frac{2\sqrt{x^2+y^2}^5}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}-1} = 2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

   Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, et donc f est continue en $(0,0)$. Ainsi, on a montré que f est continue.

2. $(x,y) \in E \iff x^2+xy+y^2 \leqslant 1 \Longrightarrow (x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{3}{4}y^2 \leqslant 1 \Longrightarrow |y| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant 2$.
   Notons que x et y jouent des roles symétriques, donc on a aussi $|x| \leqslant 2$.
   Ainsi $|x| \leqslant 2$ et $|y| \leqslant 2$. Donc $\|(x,y)\|_\infty \leqslant 2$. Par suite E est borné.
   E est fermé, en effet :
   Posons $g(x) := x^2+xy+y^2$. La fonction g est un polynôme donc g est continue.
   Soit $(x_n,y_n)_n \subset E$ une suite qui converge vers (x,y). Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_n,y_n) \leqslant 1$$

   et comme g est continue, on obtient que $g(x,y) \leqslant 1$, donc $(x,y) \in E$, donc E est fermé.
   E est fermé et borné, donc E est compact.
   f est une fonction continue sur E qui est compact, donc d'après le théorème de Weierstrass f atteint ses bornes, en particulier f atteint son minimum.

- **C4. Montrer la discontinuité d'une fonction en un point en utilisant des suites/courbes**

Exercice 3 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est-elle continue en $(0,0)$?

Correction. Soit $x > 0$, alors on a

$$f(x,x) = \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x} \to +\infty$$

quand $x \to 0^+$. On en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$.

- **D2. Déterminer la différentielle d'une application en un point**
- **D3. Calculer les dérivées partielles (premières) d'une application**
- **D4. Calculer la différentielle d'une composée**

<u>**Exercice 4**</u> Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right).$$

Déterminer la différentielle de g au point $(1,1)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Correction. On a $g = f \circ \psi$ où $\psi := (\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y)$.
$\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$.
ψ est différentiable car ψ_1, ψ_2 et ψ_3 le sont.
g est différentiable car composée des deux fonctions différentiables f et ψ.
Maintenant, il suffit de calculer les dérivées partielles de g : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= -y\sin(xy)\partial_1 f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right) - 2xy^2e^{-x^2y^2}\partial_2 f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right)\\
&\quad + 3\partial_3 f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right)\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -x\sin(xy)\partial_1 f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right) - 2yx^2e^{-x^2y^2}\partial_2 f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right)\\
&\quad + 2\partial_3 f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, au point $(1,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) &= -\sin(1)\partial_1 f(\cos(1), e^{-1}, 5) - 2e^{-1}\partial_2 f(\cos(1), e^{-1}, 5) + 3\partial_3 f(\cos(1), e^{-1}, 5)\\
\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) &= -\sin(1)\partial_1 f(\cos(1), e^{-1}, 5) - 2e^{-1}\partial_2 f(\cos(1), e^{-1}, 5) + 2\partial_3 f(\cos(1), e^{-1}, 5).
\end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle $D_{(1,1)}g$ est donnée, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, par

$$\begin{aligned}
D_{(1,1)}g(h_1,h_2) &= \left[-\sin(1)\partial_1 f(\cos(1), e^{-1}, 5) - 2e^{-1}\partial_2 f(\cos(1), e^{-1}, 5) + 3\partial_3 f(\cos(1), e^{-1}, 5)\right] h_1\\
&\quad + \left[-\sin(1)\partial_1 f(\cos(1), e^{-1}, 5) - 2e^{-1}\partial_2 f(\cos(1), e^{-1}, 5) + 2\partial_3 f(\cos(1), e^{-1}, 5)\right] h_2
\end{aligned}$$

- **D5. Montrer qu'une application n'est pas différentiable en un point**

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en ce point.

Correction. Afin de montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, on calcule

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Ainsi, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Si f était différentiable en $(0,0)$, alors on aurait $D_{(0,0)} f(h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$. Or c'est impossible car, pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, en définissant F par

$$F(h_1,h_2) := \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - 0|}{\|(h_1,h_2)\|_2} = \frac{|h_1|^3 |h_2|}{(h_1^4 + h_2^2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

on a, pour tout $x > 0$,

$$F(x,x^2) = \frac{x^3 x^2}{(x^4 + x^4)\sqrt{x^2 + x^4}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \to \frac{1}{2} \quad \text{quand } x \to 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} F(h_1,h_2) \neq 0$ et donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.