Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 UE : Analyse 4

Séance de Soutien du 24/03/2023 - Préparation au CP2

Objectif : Travail de groupe ou individuel, questions, ex. TD ou ex. de cette feuille.

Le principe de cette séance est de travailler toutes les compétences attendues pour le Contrôle Partiel 2 du 31/03/2023. Il est conseillé de traiter en priorité les exercices 1, 2, 3 et 6.

Preuves et énoncés à connaître.

1. Théorème des bornes atteintes de Weierstrass
2. Unicité de la différentielle
3. Différentielle de la composée de deux applications
4. Différentielle du produit de deux fonctions à valeurs réelles
5. Si f est différentiable, alors f admet des dérivées directionnelles suivant tout vecteur + formule pour cette dérivée

---

- **C1. Manipuler la définition de continuité d'une fonction**
- **D1. Manipuler la définition de différentiabilité d'une application**

Exercice 1 **Fonction hölderienne**

On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est 2-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\|_2 \leqslant C\|x - y\|_2^2$.

1. Montrer que toute fonction 2-höldérienne est continue.
2. Montrer que la différentielle d'une fonction 2-höldérienne est nulle en tout point.

- **C2. Déterminer la limite d'une fonction en un point**
- **C3. Montrer la continuité d'une fonction en un point (inégalités)**
- **C5. Utiliser le théorème de la borne atteinte**

Exercice 2 **Limite d'un quotient**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   est continue.

2. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum sur E.

- **C4. Montrer la discontinuité d'une fonction en un point en utilisant des suites/courbes**

<u>**Exercice 3**</u> La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est-elle continue en $(0,0)$?

- **D2. Déterminer la différentielle d'une application en un point**
- **D3. Calculer les dérivées partielles (premières) d'une application**
- **D4. Calculer la différentielle d'une composée**

<u>**Exercice 4**</u> Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = f\left(\cos(xy), e^{-x^2y^2}, 3x+2y\right).$$

Déterminer la différentielle de g au point $(1,1)$ en fonction des dérivées partielles de f.

- **D5. Montrer qu'une application n'est pas différentiable en un point**

<u>**Exercice 5**</u> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en ce point.

- **D6. Déterminer la matrice jacobienne et le jacobien d'une application**
- **D7. Calculer le gradient d'une application**

Pour travailler ces compétences, on pourra reprendre les exercices vus en TD et/ou essayer systématiquement de calculer, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, le gradient (si $p = 1$) ou la matrice jacobienne des applications rencontrées en TD ou sur cette fiche de révisions.