Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 — UE : Analyse 4

Séance de Soutien du 10/02/2023 - Préparation au CP1

Objectif : Travail de groupe ou individuel, questions, ex. TD ou ex. de cette feuille.

Le principe de cette séance est de travailler toutes les compétences attendues pour le Contrôle Partiel 1 du 24/02/2023. Il est conseillé de traiter en priorité les exercices 1, 4, 5, 9, 11, 12.

Preuves et énoncés à connaître.

1. Deuxième inégalité triangulaire
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz
3. Caractérisation d'un fermé par les suites
4. Théorème de Heine-Borel
5. Théorème des bornes atteintes de Weierstrass

• N1. Savoir démontrer qu'une application est une norme

Exercice 1 Montrer que l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\|(x,y)\| = |x-y| + |5x+2y|$$

est une norme.

Exercice 2 (*) Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application telle que

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $N(x) > 0$,
2. $N(0) = 0$,
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y)$.

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

• N2. Définir des hypothèses pour lesquelles une application est bien une norme

Exercice 3 (**) Déterminer toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

• N3. Savoir utiliser les inégalités triangulaires

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a l'identité de polarisation suivante :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2\right)$$

2. En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle x, y \rangle \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \frac{\|x-y\|_2^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$$

- **N4. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

<u>**Exercice 5**</u>

1. Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^{2k}\right) \|a\|_2^2$$
Etudier le cas d'égalité.

2. Si $a \in B(0,1)$ et $\lambda \leqslant 1$, déterminer un majorant de $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k\right)^2$ en fonction de n seulement.

- **N5. Savoir dessiner la boule unité pour une norme donnée**

<u>**Exercice 6**</u> Tracer la boule unité pour la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par $N(x,y) = 2|x| + |y|$.

- **N6. Relier une inégalité avec des normes et une inclusion de boules**

<u>**Exercice 7**</u> (*) Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\overline{B}_{N_1}(0,1) = \overline{B}_{N_2}(0,1) \Rightarrow N_1 = N_2.$$

- **N7. Utiliser la définition de limite convergente pour une norme donnée**

<u>**Exercice 8**</u> (**) Soit $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la suite $(s_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ de terme général $s_k = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ converge aussi vers x.

- **T1. Manipuler (abstraitement) les notions d'ouvert, fermé et compact**

<u>**Exercice 9**</u> Soit $(x_k)_k$ une suite réelle croissante qui converge vers x. Montrer que l'ensemble
$$A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$
est un compact de $\mathbb{R}$.

- **T2. Montrer qu'un ensemble est ouvert par des considérations géométriques**

<u>**Exercice 10**</u> (*) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer, en utilisant la définition, que la boule $B_{\|\cdot\|_\infty}(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

<u>**Exercice 11**</u> Montrer que $A = [0,1[\times]3,4]$ n'est ni ouvert, ni fermé.

- **T3. Montrer qu'un ensemble est fermé/compact en utilisant des suites**

<u>**Exercice 12**</u> Montrer que la boule $\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(x,r)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.