# Contrôle Terminal du 12/05/2023

Durée : 2h

**Le sujet est RECTO-VERSO**

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.
Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

## Exercice 1 Question de cours (3 points)

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $O$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in O$ et $f : O \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable.
Donner la preuve vue en cours de l'unicité de la différentielle de $f$ en $x_0$.

## Exercice 2 Interprétation de la formule de Taylor-Young (3 points)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable telles que, quand $(h_1,h_2) \to (0,0)$,

$$f(h_1,h_2) = 2 + h_1 - 2h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$
$$g(1+h_1,-3+h_2) = -1 + h_1^2 + h_2^2 + o(h_1^2+h_2^2).$$

1. Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement les dérivées premières de $f$ en un point que l'on explicitera.
2. Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement le gradient et les dérivées secondes de $g$ en un point $(x_0,y_0)$ que l'on explicitera.
3. (a) Montrer que la hessienne de $g$ au point $(x_0,y_0)$ est définie positive.
   (b) Que peut-on en déduire à propos du point $(x_0,y_0)$ ?

## Exercice 3 L'exemple de Peano (5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Justifier que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et déterminer leurs valeurs.
3. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent et déterminer leurs valeurs.
5. La fonction $f$ est-elle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 4** **Extrema sur un domaine (6 points)**

On considère les ensembles $A$, $E$ et $K$ définis par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 4\}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 4\}$$
$$K = A \cup E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

De plus, on admet que $E = \varphi([0, 2\pi])$ est l'ellipse paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = (\cos t, 2 \sin t)$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4x^2 - 5xy + y^2$.

1. Montrer, en utilisant les suites, que $A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $K$ un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer des réels $M > 0$ et $N > 0$ tels que, pour tout $(x, y) \in K$, $|x| \leqslant M$ et $|y| \leqslant N$.
3. Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sur $K$.
4. Déterminer le ou les extrema éventuels de $f$ sur $A$.
5. (a) Montrer que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $f(\cos t, 2 \sin t) = 4 - 5 \sin(2t)$.
   (b) En déduire les extrema de $f$ sur $E$.
6. Déduire des questions 4. et 5. la valeur du minimum et du maximum de $f$ sur $K$ ainsi que tous les points de $K$ où $f$ atteint ces valeurs.

**Exercice 5** **Arche de cycloïde et composée (3 points)**

Soit $\mathcal{C} = \varphi([0, 2\pi])$ l'arche de cycloïde paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ a pour longueur 8.
2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = F(\varphi(t)).$$

   Montrer que $g$ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa différentielle en fonction des dérivées partielles de $F$.