
Contrôle Partiel n°1 du 24/02/2023

Durée : 1h30

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.
Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Questions de cours (4 points)

1. Détailler la preuve que si $K \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, alors K est un compact de $\mathbb{R}^n$.
2. Donner la définition des normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Norme sur $\mathbb{R}^2$ (4 points)

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = |x-y| + |x+y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Normes classiques, inclusions de boules et inégalités (7 points)

On considère sur $\mathbb{R}^n$ les normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, on notera $\overline{B}_1(x,r), \overline{B}_2(x,r)$ et $\overline{B}_\infty(x,r)$ les boules fermées centrées en x et de rayon r pour ces normes.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. En utilisant la question précédente, prouver que les boules fermées $\overline{B}_1(x,r), \overline{B}_2(x,r)$ et $\overline{B}_\infty(x,r)$ vérifient une relation d'inclusion.
3. Soit $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que $(x_k)_k$ converge vers x pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   Remarque : la réciproque est aussi vraie, mais on ne la montrera pas ici.
4. Montrer que pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
   Etudier le cas d'égalité.

Exercice 4 Topologie (5 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $[1,2[\times]1,2]$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On munit l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ donnée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par $\|(x,y)\|_\infty = \max(\|x\|_2, \|y\|_2)$.
   Montrer que si $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ et B est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.