Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 | UE : Analyse 4

Contrôle Partiel 1 du 24/02/2023

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Questions de cours (4 pts)

1. Détailler la preuve que si $K \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, alors K est un compact de $\mathbb{R}^n$.
2. Donner la définition des normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. (2,5 pts) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$. Montrons que K est un compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $(x_k)_k \subset K$ une suite. Comme K est borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_k)_k$ admet une sous-suite qui converge vers un élément $x \in \mathbb{R}^n$. Comme K est fermé, alors la limite x de cette sous-suite appartient à K. On en déduit que K est compact.
2. (1,5 pt) Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Exercice 2 Norme sur $\mathbb{R}^2$ (4 pts)

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = |x - y| + |x + y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. Positivité : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| \geq 0$ et $|x + y| \geq 0$, et donc $N(x, y) \geq 0$.
2. Séparation : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$N(x,y) = 0 \iff |x+y| = |x-y| = 0 \iff x+y = 0 \text{ et } x-y = 0 \iff x = y \text{ et } 2x = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$

3. Homogénéité : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x - \lambda y| + |\lambda x + \lambda y| = |\lambda||x - y| + |\lambda||x + y| = |\lambda| N(x,y).$$

4. Identité triangulaire : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} N((x,y) + (x',y')) = N(x + x', y + y') &= |x + x' - y - y'| + |x + x' + y + y'| \\ &\leqslant |x - y| + |x' - y'| + |x + y| + |x' + y'| \\ &= N(x,y) + N(x',y'). \end{aligned}$$

Donc N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 **Normes classiques, inclusions de boules et inégalités (7 pts)**

On considère sur $\mathbb{R}^n$ les normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et tout $r>0$, on notera $\overline{B}_1(x,r),\overline{B}_2(x,r)$ et $\overline{B}_\infty(x,r)$ les boules fermées centrées en x et de rayon r pour ces normes.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et $r>0$. En utilisant la question précédente, prouver que les boules fermées $\overline{B}_1(x,r),\overline{B}_2(x,r)$ et $\overline{B}_\infty(x,r)$ vérifient une relation d'inclusion.
3. Soit $(x_k)_k\subset\mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x\in\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que $(x_k)_k$ converge vers x pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   Remarque : la réciproque est aussi vraie, mais on ne la montrera pas ici.
4. Montrer que pour tout $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n(-1)^kx_k\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^n x_k^2$.
   Etudier le cas d'égalité.

Correction.

1. (1,5 pt) Soit $x\in\mathbb{R}^n$, alors on a
$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sqrt{x_k^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}=\|x\|_2$$
$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\leqslant\sum_{k=1}^n\sqrt{x_k^2}=\sum_{k=1}^n|x_k|=\|x\|_1.$$
2. (2 pts) Montrons que $\overline{B}_1(x,r)\subset\overline{B}_2(x,r)\subset\overline{B}_\infty(x,r)$. Soit $z\in\overline{B}_1(x,r)$, alors $\|x-z\|_2\leqslant\|x-z\|_1<r$, ce qui veut dire que $z\in\overline{B}_2(x,r)$. On a donc montré que $\overline{B}_1(x,r)\subset\overline{B}_2(x,r)$.
   Si $z\in\overline{B}_2(x,r)$, alors $\|x-z\|_\infty\leqslant\|x-z\|_2<r$ et donc $z\in\overline{B}_\infty(x,r)$. On a donc montré que $\overline{B}_2(x,r)\subset\overline{B}_\infty(x,r)$.
3. (1,5 pt) Soit $(x_k)_k\subset\mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x\in\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $\varepsilon>0$, alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geq N$, $\|x_k-x\|_1<\varepsilon$.
   Ainsi pour tout $k\geq N$, on a $\|x_k-x\|_\infty\leqslant\|x_k-x\|_1<\varepsilon$ et donc $(x_k)_k$ converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. (2 pts) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs x et $y=((-1)^1,(-1)^2,...,(-1)^n)$, et on obtient
$$\left|\sum_{k=1}^n x_ky_k\right|=\left|\sum_{k=1}^n(-1)^kx_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^n((-1)^k)^2}\|x\|_2=\sqrt{n}\|x\|_2.$$
   On obtient le résultat voulu en élevant l'inégalité au carré.
   Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le cas d'égalité est obtenu si les vecteurs x et y sont liés. Ici, cela veut dire que
$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad\forall 1\leqslant k\leqslant n,\quad x_k=\lambda(-1)^k,$$
   c'est-à-dire que $x=(-\lambda,\lambda,...,(-1)^n\lambda)$.

Exercice 4 **Topologie (5 pts)**

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $[1,2[\times]1,2]$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On munit l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ donnée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par $\|(x,y)\|_\infty = \max(\|x\|_2, \|y\|_2)$.
   Montrer que si $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ et B est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Correction.

1. (1,5 pt) De manière équivalente, montrons que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, on a
$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[.$$
   Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $]k, k+1[= B\left(\frac{2k+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que l'union quelconque d'ouverts est un ouvert, il en résulte donc que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. (1,5 pt) Il suffit de montrer que $[1,2[\times]1,2]$ n'est pas un fermé. Considérons la suite $\left(1, 1+\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$. Alors c'est une suite d'éléments de $[1,2[\times]1,2]$ qui converge vers $(1,1) \notin [1,2[\times]1,2]$, ce qui prouve que cet ensemble n'est pas fermé.
3. (2 pts) Soit $A \times B$ un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(x,y) \in A \times B$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}((x,y), r) \subset A \times B$. Nous avons démontré en cours que
$$B_{\|\cdot\|_\infty}((x,y), r) = B_{\|\cdot\|_2}(x,r) \times B_{\|\cdot\|_2}(y,r),$$
   et ainsi $B_{\|\cdot\|_2}(x,r) \times B_{\|\cdot\|_2}(y,r) \subset A \times B$, ce qui veut dire que $B_{\|\cdot\|_2}(x,r) \subset A$ et $B_{\|\cdot\|_2}(y,r) \subset B$. Comme ce résultat est vrai quels que soient $x \in A$ et $y \in B$, on en déduit que A et B contiennent des boules ouvertes centrées en chacun de leurs points, ce sont donc des ouverts pour la norme $\|\cdot\|_2$.