Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre IV — Durée : 2h

Contrôle terminal

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Les exercices sont indépendants. Le sujet est* ***recto-verso****.*

Exercice 1 (Questions de cours ; $2,5$ points)**.**

1. Donnez la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V.
2. Donnez la définition d'un espace euclidien. Dans la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien.
3. Donnez la définition d'une base orthonormée de E.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Rappelez la définition de u^* (l'adjoint de u).
5. Enoncez le théorème spectral (version endomorphisme).

Correction.

1. Un produit scalaire sur V est une application $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ qui est bilinéaire, symétrique et définie positive.
2. Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

   Remarques : Ici, il faut préciser le corps de base ($\mathbb{R}$-espace vectoriel), il y en a plein d'autres ($\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$,...). L'hypothèse "dimension finie" a souvent été omise. On m'a aussi souvent parlé "du produit scalaire canonique". Comme dit un jour en CM, on utilise le terme "canonique / naturel" quand il y a un choix évident/explicite qu'on préfère utiliser à tous les autres. C'est typiquement le cas quand $E = \mathbb{R}^n$ (on prend alors $\sum x_i y_i$). Lorsqu'on a un espace euclidien abstrait E, il n'y a de "choix évident", et on ne peut pas parler de $\sum x_i y_i$ sans d'abord choisir une base qui n'aura rien de "canonique".
3. Une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une base de E (= famille libre et génératrice) dont les éléments sont deux à deux orthogonaux (leur produit scalaire vaut 0) et normés (leur norme vaut 1).
4. L'adjoint de u est l'unique endomorphisme u^* vérifiant $\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, u^*(\mathbf{y}) \rangle$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.
5. Soit $u \in S(E)$ (c'est-à-dire u est autoadjoint/symétrique, on a $u^* = u$). Alors u se diagonalise dans une base orthonormée.

   Attention aux hypothèses : $u \in S(E)$ et pas $u \in \mathcal{O}(E)$...

$\square$

Exercice 2 (5 points)**.**

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire et de son orientation canoniques. Dans la suite, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels. On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice (dans la base canonique) est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On note M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrez que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminez les éléments géométriques de f, c'est-à-dire trouver $\mathbf{u}$ et θ tels que f soit la rotation d'axe orienté et dirigé par $\mathbf{u}$ et d'angle θ.

La méthode pour trouver les éléments géométriques de f est laissée au choix du candidat ou de la candidate. On pourra par exemple penser à écrire $A - {}^tA$ sous la forme

$$A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction.

1. $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tMM = I_3$ (c'est-à-dire M est orthogonale, $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$) <u>et</u> $\det(M) = 1$.

   Remarque : certains ont oublié l'une ou l'autre de ces hypothèses.

2. On fait les calculs, on trouve bien que ${}^tAA = I_3$ et

$$\det(A) = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{=} \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{3^3} \times (36 - (-3)(-3)) = \frac{27}{27} = 1$$

   (en faisant un développement 1ère colonne).

   Remarques : écrivez les détails des calculs. Le déterminant a généralement été bien calculé. Précisez quand vous faites un développement ligne / colonne votre choix pour aider le correcteur, surtout quand vous ne faites pas de simplifications avant et qu'il n'y a pas de choix "évident".

3. On utilise la méthode la plus simple du cours. Après un rapide calcul on trouve

$$A - {}^tA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On pose $\mathbf{u} = (-4/3, 0, -4/3)$ (voir les remarques à la fin de cette question, on aurait pu prendre $\mathbf{u} = (-1, 0, -1)$). Alors d'après le cours f est la rotation d'axe orienté et dirigé par $\mathbf{u}$ et d'angle $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant

$$1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr}(A) = \frac{1}{3}(2 + 1 + 2) = \frac{5}{3}$$

   c'est-à-dire $\cos\theta = 1/3$, ou encore $\theta = \arccos(1/3) \in [0, \pi]$.

   Remarques : a priori, l'angle est entre dans $[-\pi, \pi]$. Avec cette méthode et ce choix de $\mathbf{u}$, le cours assure qu'il se trouve alors dans $[0, \pi]$. ATTENTION : si vous choisissez $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ au lieu de $(-1, 0, -1)$ vous changez l'orientation de l'axe et donc le signe de θ ! Si on veut conserver l'orientation et la propriété $\theta \in [0, \pi]$, on ne peut changer $\mathbf{u}$ en $\lambda\mathbf{u}$ que si $\lambda > 0$.

   La deuxième méthode (non recommandée) consiste à résoudre $AX = X$ pour trouver l'axe (revient à résoudre un système linéaire à 3 inconnues à la place de faire 3 soustractions avec la méthode $A - {}^tA$... choisissez votre camp), puis trouver $\cos\theta$ avec la méthode ci-dessus. <u>Il reste alors à déterminer le signe de θ pour compléter la question</u> (parmi celles et ceux ayant choisi cette méthode, <u>personne</u> n'a fait cette étape...). Pour cela je renvoie au cours : il faut choisir un Y qui n'est pas colinéaire à l'axe, calculer un produit vectoriel et regarder le signe d'un déterminant... Des calculs pénibles que vous avez envie d'éviter en examen et qu'on n'a pas besoin de faire avec la première méthode.

Résumé : 1ère méthode = 3 lignes de calculs, rapide, efficace, signe de θ gratuit. 2ème méthode = 1 page et demi de calcul au moins, longue, fastidieuse (nombreuses erreurs possibles), détermination du signe de θ tellement pénible qu'on oublie de la faire.

$\square$

Exercice 3 (4 points)**.**
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$. On définit $f : E \to E$ par

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a} \qquad \forall \mathbf{x} \in E.$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Montrez que $f^* = -f$.
3. Soit M la matrice de f dans une base orthonormée de E. Que peut-on dire de M ?
4. On suppose que $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ forme une famille libre de E. Quel est le noyau de f ? Quelle est son image ?

Correction.

1. L'application $\langle \mathbf{a}, \cdot \rangle$ est une forme linéaire (vu en cours, c'est la linéarité à droite du produit scalaire...). On en déduit immédiatement que $\langle \mathbf{a}, \cdot \rangle \mathbf{b}$ est linéaire de E dans E. De même pour $-\langle \mathbf{b}, \cdot \rangle \mathbf{a}$. Par somme f est linéaire.

   Bien sûr on peut faire le calcul directement en montrant que $f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y})$... Attention, certains montrent seulement $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$, cela ne suffit pas.

2. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a

   $$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \underbrace{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{b} - \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle.$$

   D'un autre côté

   $$\langle \mathbf{x}, -f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{a} - \underbrace{\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle.$$

   car $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ et $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$ par symétrie du produit scalaire. Par unicité de l'adjoint, on a $f^* = -f$.

3. Soit M^* la matrice de f^* dans la BON susmentionnée. D'après le cours on a $M^* = {}^tM$. On déduit de la relation $f^* = -f$ la relation matricielle ${}^tM = -M$, c'est-à-dire M est antisymétrique.

   Remarque : beaucoup m'ont dit "M symétrique", voire "M orthogonale"...

4. Soit $\mathbf{x} \in \ker(f)$. On a donc

   $$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a} = 0.$$

   Comme $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ forme une famille libre, on a nécessairement $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{x} \in \mathrm{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\perp = \mathbf{a}^\perp \cap \mathbf{b}^\perp$ ($\mathbf{x}$ est orthogonal à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{b}$). Réciproquement, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\perp$ on a évidemment $f(\mathbf{x}) = 0$. D'où

   $$\ker(f) = \mathrm{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\perp.$$

   Comme $f(\mathbf{x})$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (qui est de dimension 2). On a l'égalité si $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. Par ailleurs, on sait que

   $$\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$$

On en déduit que $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim E - \dim \ker(f) = \dim E - \dim \operatorname{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\perp = \dim \operatorname{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2$. Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Remarque : cette question a été très mal traitée (surtout pour l'image). On aurait aussi pu traiter l'image directement sans raisonner avec les dimensions d'ailleurs. On sait que $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Il suffit maintenant de montrer que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \operatorname{Im}(f)$ (ce qui implique l'inclusion réciproque). Pour cela, on choisit $\mathbf{x} \in \mathbf{b}^\perp \setminus \mathbf{a}^\perp$ (ce qui est possible car $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est libre !). Pour un tel $\mathbf{x}$, on trouve

$$f(\mathbf{x}) = \underbrace{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}_{\neq 0} \mathbf{b} - \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle}_{=0} \mathbf{a} = \underbrace{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}_{\neq 0} \mathbf{b}.$$

Donc $\mathbf{b} \in \operatorname{Im}(f)$. De même en choisissant $\mathbf{x} \in \mathbf{a}^\perp \setminus \mathbf{b}^\perp$ on montre que $\mathbf{a} \in \operatorname{Im}(f)$.

□

Exercice 4 (5, 5 points)**.**
Soit $n \geq 1$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Pour $P, Q \in E$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} P(k)Q(k).$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Pour $i = 1, \dots, n+1$ on pose
$$P_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (X - k).$$
Montrez que $P_i \in E$.
4. Calculez $\langle P_i, P_j \rangle$ pour $i \neq j$ avec $1 \leq i, j \leq n+1$. En déduire une base orthonormée de E.
5. Montrez que l'ensemble $H = \{P \in E \mid \sum_{k=1}^{n+1} P(k) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
6. Montrez que H est un hyperplan de E et trouvez un polynôme (non nul) normal à H.
7. Soit $Q \in E$. En utilisant la question précédente, établir que la distance $\operatorname{dist}(Q, H)$ de Q à H vaut
$$\operatorname{dist}(Q, H) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big| \sum_{k=1}^{n+1} Q(k) \Big|.$$

Correction.

1. $\dim E = n + 1$ (une base est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$).
2. Il faut montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et <u>défini positif</u> (c'est ce dernier point qui a été souvent mal traité). Pour $k = 1, \dots, n+1$, l'application $(P, Q) \mapsto P(k)Q(k)$ est évidemment symétrique et bilinéaire (je ne fais pas les détails), donc par somme on a bien que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire et symétrique. De plus, pour tout $P \in E$, on a
$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{P(k)^2}_{\geq 0} \geq 0$$
avec égalité ssi $P(k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n+1$. En particulier, si $\langle P, P \rangle = 0$ alors P a au moins $n+1$ racines (à savoir $k = 1, \dots, n+1$). Or comme $P \in E$, on a $\deg P \leq n$, donc nécessairement $P = 0$.

   Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3. P_i est le produit de n facteurs de degré 1 à coefficients réels (on a $n+1$ termes pour k entre 1 et $n+1$, et on a enlevé celui correspondant à $k=i$). Donc $\deg P_i = n$, d'où $P_i \in E$.

4. Question très mal traitée. Soit k entre 1 et $n+1$. On a $P_i(k) = 0$ dès que $k \neq i$. De même, $P_j(k) = 0$ dès que $k \neq j$. Donc, comme $i \neq j$, on a $P_i(k) = 0$ et / ou $P_j(k) = 0$, autrement dit $P_i(k)P_j(k) = 0$. Donc en faisant la somme, on trouve $\langle P_i, P_j \rangle = 0$.

   Une famille orthogonale d'éléments non nuls est toujours libre (d'après le cours), donc $(P_1, \dots, P_{n+1})$ est libre. Comme $\dim E = n+1$ on en déduit que c'est une base orthogonale (personne n'a justifié ce point). Il suffit maintenant de la normer pour obtenir une BON (Beaucoup ont affirmé $\|P_i\| = 1$ de manière automatique sans se poser de questions...). On a $\langle P_i, P_i \rangle = P_i(i)^2$ (car $P_i(k) = 0$ si $k \neq i$, donc $\|P_i\| = |P_i(i)|$. Une BON de E est

$$\left(\frac{P_1}{\|P_1\|}, \dots, \frac{P_{n+1}}{\|P_{n+1}\|}\right) = \left(\frac{P_1}{|P_1(1)|}, \dots, \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}(n+1)|}\right).$$

   Si on veut faire le calcul direct avec la formule, on a

$$\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} P_i(k)P_j(k).$$

   Erreur fréquente : écrire $P_i(k) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(X-k)$. Si vous gardez l'inconnue X cela signifie que vous n'êtes pas du tout en train d'évaluer P_i en un point (vous gardez un polynôme au lieu d'avoir un réel) ! Il y a un conflit de notation entre l'indice du produit et le point en lequel vous évaluez. Ici on n'a pas le choix, on ne peut pas avoir des indices k partout (pour la somme ET pour le produit) : il faut choisir un autre nom pour les variables muettes ! On écrit par exemple

$$P_i(k) = \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n+1}(k-\ell),$$

   et de même pour $P_j(k)$, d'où

$$\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n+1}(k-\ell)\Big)\Big(\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{n+1}(k-\ell)\Big) = \sum_{k=1}^{n+1}\underbrace{\Big(\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i,j}}^{n+1}(k-\ell)^2\Big)}_{=0 \text{ si } k\neq i,j}\underbrace{(i-k)(j-k)}_{=0 \text{ si } k=i \text{ ou } k=j} = 0.$$

5. Voir question suivante (on fait tout d'un coup).

6. Ecrivons $N = 1$ (polynôme constant). Alors pour tout $P \in E$ on a $\sum_{k=1}^{n+1} P(k) = \langle P, N \rangle$. Autrement dit, H est exactement l'ensemble des $P \in E$ tel que $\langle P, N \rangle = 0$, c'est-à-dire $H = \mathrm{Vect}(N)^{\perp}$. C'est donc un hyperplan de E de vecteur normal N (on a gratuitement la dimension et le fait que c'est un espace vectoriel).

   Remarques : la question 5. a en général été bien traité (en montrant à la main que H est un ss-ev de E). En revanche, la question 6. a été mal traitée. Attention, $\sum_k P(k) = 0$ n'implique pas du tout que P a $n+1$ racines... (il faudrait que $P(k) \geq 0$ pour tout k pour pouvoir conclure ainsi, et rien de le garantit – c'est même parfois faux !).

7. On note p_N la projection orthogonale (ne pas oublier ce terme "la projection" n'a pas de sens tout seul) sur $\mathrm{Vect}(N) = H^{\perp}$, et p_H la projection orthogonale sur H, de sorte que $Q = p_N(Q) + p_H(Q)$. D'après le cours, on a

$$\mathrm{dist}(Q, H) = \|Q - p_H(Q)\| = \|p_N(Q)\|.$$

Puisque N est normal à H, on a par ailleurs

$$p_N(Q) = \left\langle Q, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|} = \langle Q, N \rangle \frac{N}{\|N\|^2}$$

(il faut penser à normaliser N !), d'où

$$\mathrm{dist}(Q, H) = \|p_N(Q)\| = |\langle Q, N\rangle| \frac{\|N\|}{\|N\|^2} = \frac{|\langle Q, N\rangle|}{\|N\|}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\langle Q, N\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} Q(k)$ et $\|N\|^2 = \langle N, N\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} 1 = n+1$.

□

Exercice 5 (4 points)**.**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M\, {}^t\!M\, M = I_n$.

1. Montrez que M est inversible.
2. Montrez que M est symétrique. *Indication : on pourra d'abord essayer de montrer que M^{-1} est symétrique.*
3. Montrez que nécessairement $M = I_n$.

Correction.

1. Première preuve : comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det({}^tA) = \det A$, on trouve $1 = \det(I_n) = \det(M{}^tMM) = \det(M)^3 \neq 0$, donc M est inversible.

   Deuxième preuve : M est inversible si et seulement si il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $MA = I_n$. En posant $A = {}^tMM$ on a bien $MA = I_n$, donc M est inversible, d'inverse ${}^tMM$.

   Pour la deuxième méthode, la rédaction était souvent assez mauvaise...

2. On a $M^{-1} = {}^tMM$. Or, puisque ${}^tAB = {}^tB{}^tA$ et ${}^t({}^tA) = A$, on a

   $${}^t(M^{-1}) = {}^t({}^tMM) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM = M^{-1}.$$

   Donc M^{-1} est symétrique. De plus, comme la transposée et le passage à l'inverse commutent, on a

   $$M^{-1} = {}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1},$$

   d'où (en multipliant à droite par M et à gauche par ${}^tM$) l'égalité ${}^tM = M$.
   Attention, certains montrent que $M{}^tM = {}^tMM$. On ne peut pas en déduire directement que M est symétrique, seulement que M commute avec sa transposée (cf endomorphisme normaux).

3. Il y a beaucoup de tentative d'arnaque ici, très peu ont réussi cette question (qui était difficile). Première remarque : M symétrique ne veut PAS dire que ${}^tMM = I_n$!!! (qui est la définition de M orthogonale).

   Première preuve : M est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre non nul associé. Alors puisque ${}^tM = M$ on a

   $$X = I_nX = M{}^tMMX = M^3X = \lambda^3X$$

   (car $MX = \lambda X$, donc $M^2X = M(MX) = \lambda MX = \lambda^2X$ etc.). Puisque $X \neq 0$ nécessairement $\lambda^3 = 1$, donc $\lambda = 1$ (puisque λ est réel et que c'est l'unique solution réelle de l'équation $x^3 = 1$). On vient de montrer que l'ensemble des valeurs propres de M (= son spectre) est réduit à $\{1\}$. Comme M est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que PMP^{-1} soit diagonale, et les valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de M. Donc nécessairement $PMP^{-1} = I_n$, autrement dit $M = P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$.

Deuxième rédaction (légèrement différente) : M est symétrique, donc a donc $M^tMM = M^3 = I_n$. Comme M est diagonalisable (car symétrique réelle) il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $D := PMP^{-1}$ soit diagonale. D'où

$$I_n = PI_nP^{-1} = PM^3P^{-1} = (PMP^{-1})(PMP^{-1})(PMP^{-1}) = D^3.$$

Or, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, on a $D^3 = \mathrm{diag}(\lambda_1^3, \ldots, \lambda_n^3)$, donc $\lambda_k^3 = 1$ pour $k = 1, \ldots, n$. Comme précédemment on en déduit que $\lambda_k = 1$ pour $k = 1, \ldots, n$, c'est-à-dire $D = I_n$. D'où $M = P^{-1}DP = P^{-1}P = I_n$.

$\square$