Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre IV — Durée : 2h

Contrôle terminal

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Les exercices sont indépendants. Le sujet est* ***recto-verso****.*

Exercice 1 (Questions de cours ; $2,5$ points)**.**

1. Donnez la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V.
2. Donnez la définition d'un espace euclidien. Dans la suite, $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ désigne un espace euclidien.
3. Donnez la définition d'une base orthonormée de E.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Rappelez la définition de u^* (l'adjoint de u).
5. Enoncez le théorème spectral (version endomorphisme).

Exercice 2 (5 points)**.**

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire et de son orientation canoniques. Dans la suite, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels. On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice (dans la base canonique) est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On note M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrez que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminez les éléments géométriques de f, c'est-à-dire trouver $\mathbf{u}$ et θ tels que f soit la rotation d'axe orienté et dirigé par $\mathbf{u}$ et d'angle θ.

La méthode pour trouver les éléments géométriques de f est laissée au choix du candidat ou de la candidate. On pourra par exemple penser à écrire $A - {}^tA$ sous la forme

$$A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (4 points)**.**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$. On définit $f : E \to E$ par

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle \mathbf{a} \qquad \forall \mathbf{x} \in E.$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Montrez que $f^* = -f$.
3. Soit M la matrice de f dans une base orthonormée de E. Que peut-on dire de M ?
4. On suppose que $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ forme une famille libre de E. Quel est le noyau de f ? Quelle est son image ?

Exercice 4 (5, 5 points)**.**
Soit $n \geq 1$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Pour $P, Q \in E$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} P(k)Q(k).$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Pour $i = 1, \ldots, n+1$ on pose
$$P_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (X - k).$$
Montrez que $P_i \in E$.
4. Calculez $\langle P_i, P_j \rangle$ pour $i \neq j$ avec $1 \leq i, j \leq n+1$. En déduire une base orthonormée de E.
5. Montrez que l'ensemble $H = \{P \in E \mid \sum_{k=1}^{n+1} P(k) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
6. Montrez que H est un hyperplan de E et trouvez un polynôme (non nul) normal à H.
7. Soit $Q \in E$. En utilisant la question précédente, établir que la distance $\operatorname{dist}(Q, H)$ de Q à H vaut
$$\operatorname{dist}(Q, H) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big| \sum_{k=1}^{n+1} Q(k) \Big|.$$

Exercice 5 (4 points)**.**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M\, {}^t\!M\, M = I_n$.

1. Montrez que M est inversible.
2. Montrez que M est symétrique. *Indication : on pourra d'abord essayer de montrer que M^{-1} est symétrique.*
3. Montrez que nécessairement $M = I_n$.