① Notons (f_1, f_2, f_3) la base cherchée. Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$ notons $B_i = (b_{i1} \quad b_{i2} \quad b_{i3})$ la matrice de f_i dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$, puis B la matrice de lignes B_1, B_2 et B_3.
Notons enfin $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ la matrice de e_j dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de colonnes A_1, A_2 et A_3.

Dire que (f_1, f_2, f_3) est duale de (e_1, e_2, e_3), c'est requérir pour chaque $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ la relation $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ autrement dit $\sum_{k=1}^{3} b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$, autrement dit $BA = I$: ainsi $B = A^{-1}$.
Or la calcule :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ L_2 - 3L_3 \\ \end{matrix} \right.$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{L_1 + L_2} = B \right.$$

et on lit sur B que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f_1(x,y,z) = x + 2y - 7z$$
$$f_2(x,y,z) = y - 3z$$
$$f_3(x,y,z) = z$$

② 1) Notons $e_1 = (1,1,0,-1)$ et $e_2 = (-3,0,2,0)$

On obtiendra une base orthogonale de F en appliquant la méthode de Gram - Schmidt à la base (e_1, e_2). Exécutons !

Posons $f_1 = e_1 = (1,1,0,-1)$

puis $f_2 = e_2 - \frac{\langle f_1 | e_2 \rangle}{\langle f_1 | f_1 \rangle} f_1$ où $\langle f_1 | f_1 \rangle = 1+1+0+1 = 3$

$\langle f_1 | e_2 \rangle = -3+0+0+0 = -3$

donc $f_2 = e_2 + f_1 = (-3,0,2,0) + (1,1,0,-1) = (-2,1,2,-1)$

Le système (f_1, f_2) est une réponse possible à la question

2) On commence par déterminer la projection orthogonale de a sur F, qu'on note b.

On la sait calculable par la formule

$$b = \frac{\langle f_1 | a \rangle}{\langle f_1 | f_1 \rangle} f_1 + \frac{\langle f_2 | a \rangle}{\langle f_2 | f_2 \rangle} f_2$$

dans laquelle $\langle f_1 | a \rangle = 0+0+0+0 = 0$

$\langle f_2 | a \rangle = 0+0+10+0 = 10$ donc $b = f_2$

$\langle f_2 | f_2 \rangle = 4+1+4+1 = 10$

On calcule ensuite $a - b = (0,0,5,0) - (-2,1,2,-1)$

$= (2,-1,3,1)$

On écrit enfin que $d(a,F) = d(a,b) = \|a-b\|$

$= \sqrt{4+1+9+1} = \sqrt{15}$

(3) 1) a) Soit $P, Q \in F, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda P+Q)(-X) = \lambda P(-X) + Q(-X) = \lambda P + Q, \text{ d'où } \lambda P + Q \in F$$

b) Soit $n \in \{0,1,\dots,5\}$. Comme $n \leq 5$, $X^n \in E$

Si $n \in \{0,2,4\}$, on peut écrire $n = 2k$ avec $k \in \{0,1,2\}$

puis $(-X)^n = (-X)^{2k} = [(-X)^2]^k = (X^2)^k = X^{2k} = X^n$. Donc $X^n \in F$

Si $n \in \{1,3,5\}$, on peut écrire $n = 2l+1$ avec $l \in \{0,1,2\}$

puis $(-X)^n = (-X)^{2l+1} = [(-X)^2]^l \times (-X) = -(X^2)^l X = -X^{2l+1} = -X^n$. Donc $X^n \in G$.

c) La famille $(1, X^2, X^4)$ est libre - par exemple parce que ses trois polynômes sont de degrés distincts. Puisque F contient une famille libre de trois vecteurs, $\dim F \geqslant 3$.

2) Soit $P \in F$ et soit $Q \in G$

On écrit $\langle P, Q \rangle = \int_{t=-1}^{t=1} P(t)\,Q(t)\,dt$ puis on effectue dans cette expression le changement de variable $s = -t$:

$$\langle P, Q \rangle = -\int_{s=1}^{s=-1} P(-s)\,Q(-s)\,ds = \int_{-1}^{1} P(-s)\,Q(-s)\,ds$$

$$= \int_{-1}^{1} P(s)\,[-Q(s)]\,ds = -\int_{-1}^{1} P(s)\,Q(s)\,ds = -\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt = -\langle P, Q \rangle$$

D'où $\langle P, Q \rangle = 0$

3) Soit $P \in F$. Par la question 2, pour tout $Q \in G$ $\langle P, Q \rangle = 0$ donc $P \in G^\perp$.

Ceci prouve l'inclusion $F \subset G^\perp$, d'où l'inégalité $\dim F \leqslant \dim G^\perp$

Mais par ailleurs $\dim G^\perp = \dim E - \dim G = 6 - \dim G \leqslant 6 - 3$ (par le 1c))

$= 3 \leqslant \dim F$ (encore 1c))

donc $\dim F = \dim G^\perp$, avec $F \subset G^\perp$

Donc $F = G^\perp$

4

1) Comme $x \in F$, $p(x)=x$; comme $x \in G$, $q(x)=x$

donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 2x$.

D'une part $(p+q)^2(x) = (p+q)(x) = 2x$

D'autre part $(p+q)^2(x) = [p+q][(p+q)(x)] = [p+q](2x) = 2(p+q)(x) = 4x$

Donc $2x = 4x$ donc $x = 0$.

<u>NB</u> : on peut être plus concis en observant que comme $p+q$ est un projecteur $Sp(p+q) \subset \{0,1\}$. Si x n'était pas nul, il serait vecteur propre pour la valeur propre 2, c'est impossible.

2) Comme p et q sont des projections, $p^2=p$ et $q^2=q$

Puis, comme $p+q$ est un projecteur,

$p+q = (p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p + p\circ q + q\circ p + p$ donc $p\circ q + q\circ p = 0$

autrement dit $p\circ q = -q\circ p$

3) Soit $y \in Im(p\circ q)$; on peut prendre un $x \in E$ avec $y = (p\circ q)(x) = p[q(x)]$

donc $q(x)$ est un antécédent de y par p donc $y \in Im\, p$

Ainsi $Im(p\circ q) \subset Im\, p$. Or $Im\, p = F$ puisque p projette sur F

et donc $Im(p\circ q) \subset F$.

De même $Im(q\circ p) \subset G$.

Comme $q\circ p = -p\circ q$, $Im(q\circ p) = Im(p\circ q) \subset F$ } et donc $Im(q\circ p) \subset F\cap G$

Par le 1) $F \cap G = \{0\}$ donc $Im(q\circ p) \subset \{0\}$ donc $q\circ p = 0$ donc

$p\circ q = -q\circ p = 0$

4) Soit $x \in E$. Notons $x = x_1 + w$ où $x_1 \in H$ et $w \in H^\perp$. Comme $H = F+G$ on peut prendre $y \in F$ et $z \in G$ pour lesquels $x_1 = y+z$ donc $x = y+z+w$

Alors $(p+q)(x) = p(y) + p(z) + p(w) + q(y) + q(z) + q(w)$

Comme $y \in F$, $p(y) = 0$. Comme $z \in G$, $z = q(z)$ donc $p(z) = (p\circ q)(z) = 0(z) = 0$

Comme $F \subset H$, $H^\perp \subset F^\perp$ donc $p(w) = 0$

De même $q(y) = 0$, $q(z) = z$ et $q(w) = 0$

Donc $(p+q)(x) = y + 0 + 0 + 0 + z + 0 = y + z = x_1$, projection orthogonale de x sur H

Donc $p+q$ est la projection orthogonale sur H.