Correction du CC1 :

Questions de cours :

1 1) La norme associée à φ est
$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$$

1 2) $F^\perp = \{ x \in E \,/\, \forall y \in F, \ \varphi(x,y) = 0 \}$.

Exercice 1 :

1 1) 0_E est l'application nulle sur $[0;1]$. On a
$0_E(0) = 0_E(1) = 0$ donc $0_E \in F$.
Soit $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{cases} (f+\lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = 0 \\ (f+\lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = 0 \end{cases}$$
Donc $f+\lambda g \in F$. Ainsi F est un sev de E.

2) Soit $(f,g,h) \in F^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\varphi(f+\lambda g, h) = -\int_0^1 \left((f+\lambda g)(x) h''(x) + (f+\lambda g)''(x) h(x)\right) dx$$
$$= -\int_0^1 \left((f(x)+\lambda g(x)) h''(x) + (f''(x) + \lambda g''(x)) h(x)\right) dx$$
$$= -\int_0^1 \left(f(x) h''(x) + f''(x) h(x)\right) dx - \lambda \int_0^1 \left(g(x) h''(x) + g''(x) h(x)\right) dx$$
$$= \varphi(f,h) + \lambda \varphi(g,h).$$

1 Donc φ est linéaire à gauche.
On a
$$\varphi(f,h) = -\int_0^1 \left(f(x) h''(x) + f''(x) h(x)\right) dx$$
$$= -\int_0^1 \left(h(x) f''(x) + h''(x) f(x)\right) dx$$
$$= \varphi(h,f).$$

1 Donc φ est symétrique et φ est bilinéaire.

On a $\varphi(f,f) = -2\int_0^1 f''(x)f(x)\,dx$

$$= -2\left(\left[f'(x) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)^2\,dx \right)$$

$$= 2\int_0^1 f'(x)^2\,dx \geqslant 0$$

1 car $f(0) = f(1) = 0$. Donc φ est positive.

Soit f dans F telle que $\varphi(f,f) = 0$. Alors $\int_0^1 f'(x)^2\,dx = 0$. Comme $(f')^2$ est positive et continue sur $[0,1]$, on obtient que $f'(x)^2 = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et f est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, on obtient que $f = 0_{[0,1]}$.

2 Donc φ est définie, c'est un produit scalaire sur F.

<u>Exercice 2 :</u>

1) Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on a

1 $$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$$

donc $\operatorname{Dim} F^\perp = 3 - \operatorname{Dim} F = 3 - 1 = 2$.

On $\begin{cases} \langle (1,-2,1), (2,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1,-2,1), (1,0,-1) \rangle = 0 \end{cases}$

Donc $\operatorname{Vect}((2,1,0),(1,0,-1)) \subset F^\perp$.

Comme $(2,1,0)$ et $(1,0,-1)$ ne sont pas colinéaires, on a $\operatorname{Vect}((2,1,0),(1,0,-1)) = F^\perp$.

3 2) Soit $u_1 = (2,1,0)$ et $e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$

Par le procédé de Gram-Schmidt, on pose

$$u_2 = (1,0,-1) - p_{e_1}((1,0,-1))$$

$$= (1,0,-1) - \langle (1,0,-1), e_1 \rangle e_1$$

$$= (1,0,-1) - \frac{1}{5}\langle (1,0,-1),(2,1,0)\rangle (2,1,0)$$

$$= (1,0,-1) - \frac{2}{5}(2,1,0)$$

$$= \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -1\right)$$
$$= \frac{1}{5}(1, -2, -5)$$

On note $e_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, -5)$

Alors (e_1, e_2) est une base orthonormée de $F^\perp$.

2 3) On a $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \langle (x,y,z), (1,-2,1) \rangle = 0\}$
$= F^\perp$.

Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on a
$$G^\perp = (F^\perp)^\perp = F.$$

Exercice 3:

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

2
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et notons

$$g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g_p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto t^n \sqrt{f(t)} \qquad\qquad t \longmapsto t^p \sqrt{f(t)}$$

qui sont bien définies car f est à valeurs positives ou nulles sur $[0,1]$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle g_n, g_p \rangle^2 \leq \langle g_n, g_n \rangle \langle g_p, g_p \rangle$$

2
$$\iff \left(\int_0^1 t^{n+p} f(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 t^{2n} f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 t^{2p} f(t)\, dt\right)$$

car $(\sqrt{f(t)})^2 = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

On a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_n = \lambda g_p$.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_n = \lambda g_p$, alors
$$\forall t \in [0,1], \quad t^n \sqrt{f(t)} = \lambda t^p \sqrt{f(t)}$$

Si f n'est pas identiquement nulle, alors ~~(il ex)~~, comme f est continue sur $[0,1]$, il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset [0,1]$ tel que $\forall t \in I, f(t) \neq 0$.

Donc $\forall t \in I$, $t^n = \lambda t^p$.

Le polynôme $t^n - \lambda t^p$ a une infinité de racines (tout t dans I) donc est nul : on a $n = p$ et $\lambda = 1$

Réciproquement, si f est identiquement nulle ou si $n = p$ et $\lambda = 1$, alors on a bien

2

$$\left(\int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt\right)^2 = \left(\int_0^1 t^{2n} f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 t^{2p} f(t)\, dt\right)$$