Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre IV — Durée : 1h30

Contrôle continu 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Les exercices sont indépendants.*

Questions de cours (3 points)

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et θ un réel. Quelle est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle θ ?

   [On demande seulement la réponse, sans aucun élément d'explication ou de démonstration].

2. Soit E un espace euclidien, dans lequel on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

   (a) Rappeler (sans en écrire la démonstration) la formule qui permet de calculer le produit scalaire $\langle u, v\rangle$ de deux vecteurs u et v de E à partir des normes de $u+v$ et $u-v$.

   (b) Écrire une démonstration de l'énoncé suivant : si f est un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x appartenant à E, $\|f(x)\| = \|x\|$, alors pour tous y et z de E, $\langle f(y), f(z)\rangle = \langle y, z\rangle$.

Exercice 1 (3 points)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base (e_1, e_2, e_3) définie par :

$$e_1 = (1,0,0) \qquad e_2 = (-2,1,0) \qquad e_3 = (1,3,1).$$

Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de (e_1, e_2, e_3).

Exercice 2 (4 points)**.** Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note :

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,-1), (-3,0,2,0)\right).$$

1. Expliciter une base orthogonale de F.
2. On note $a = (0,0,5,0)$. Déterminer la distance de a à F.

Exercice 3 (5 points)**.** Dans cet exercice, E désigne l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 5. On le munit du produit scalaire défini pour tous polynômes P et Q éléments de E par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note enfin :

$$F = \{P \in E \mid P(-X) = P(X)\} \qquad \text{et} \qquad G = \{P \in E \mid P(-X) = -P(X)\}.$$

1. (a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Dans la suite, on pourra utiliser sans en écrire la vérification que G est également un sous-espace vectoriel.

   (b) Justifier que pour tout $n \in \{0,2,4\}$, $X^n \in F$ et que pour tout $n \in \{1,3,5\}$, $X^n \in G$.

   (c) En déduire que $\dim F \geq 3$. Dans la suite, on pourra aussi utiliser sans en écrire la preuve que $\dim G \geq 3$.

2. Montrer que pour tout $P \in F$ et tout $Q \in G$, $\langle P, Q\rangle = 0$.
3. Montrer que $F = G^{\perp}$.

Exercice 4 (5 points)**.**
Soit E un espace euclidien, soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $H = F + G$.
On note p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur G.
On suppose que $p+q$ est un projecteur, c'est-à-dire que $(p+q)\circ(p+q) = p+q$. L'objectif de l'exercice est de montrer que $p+q$ est la projection orthogonale sur H.

1. Soit x un vecteur de $F \cap G$. Justifier que $(p+q)(x) = 2x$ et en déduire que $x = 0$.
2. Montrer que $p \circ q = -q \circ p$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset F$ et que $\mathrm{Im}(q \circ p) \subset G$, puis que $p \circ q = q \circ p = 0$.
4. Montrer que $p+q$ est la projection orthogonale sur H.