Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre IV | Durée : 1h30

Contrôle continu 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Les exercices sont indépendants.*

Questions de cours (2 points) Soit (E, φ) un espace euclidien, dans lequel on note φ le produit scalaire.

1. Écrire la définition de la norme associée à φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Écrire la définition de l'orthogonal de F.

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles sur $[0,1]$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\varphi : F \times F \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f,g) = -\int_0^1 (f(x)g''(x) + f''(x)g(x))dx.$$

   Montrer que φ est un produit scalaire sur F.

   Indication : On pensera à effectuer une intégration par parties pour montrer la positivité de φ.

Exercice 2 (6 points)**.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soient $v = (1, -2, 1)$ et $F = \mathrm{Vect}\{v\}$.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + z = 0\}$. Déterminer une base de $G^\perp$.

Exercice 3 (6 points)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue et à valeurs positives ou nulles sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\left(\int_0^1 t^{n+p} f(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 t^{2n} f(t)dt\right)\left(\int_0^1 t^{2p} f(t)dt\right).$$

Préciser le cas d'égalité.

Indication : On pensera à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.