Fiche 2

Exercice 1. Soit E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
2. Montrer que si $E = F \oplus G$ et F et G sont orthogonaux, alors $G = F^\perp$.
3. Soit $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Montrer qu'ils sont en somme directe.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire de matrice A dans la base canonique.
Déterminer une base de l'orthogonal respectif des ensembles suivants :

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,0,1)) \quad \text{et} \quad G = \{(0,1,0)\}.$$

Exercice 3.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on pose $u_1 = (1,2,2), u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 soit colinéaire à u_1, et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, et u_2.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2, X^3)$ pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, trouver une base orthonormée du plan $\{(2,-3,6)\}^\perp$.

Exercice 4. Soit $p : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que p est un projecteur, i.e. $p^2 = p$. Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
2. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. On suppose que p est la projection sur F parallèlement à G. Montrer que p est un projecteur.
3. On suppose maintenant que E est un espace euclidien. Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in \mathrm{Im}(p), \forall y \in \mathrm{Ker}(p),\ \langle x, y\rangle = 0$.

Exercice 5. Soient E un espace euclidien et p un projecteur sur E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \text{pour tout } x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur $a = (2,-1)$. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur la droite de base a, et en déduire la matrice de la projection orthogonale sur la droite perpendiculaire à a.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la projection orthogonale de $b = (2,4,4)$ sur la droite de base $(1,1,1)$ puis la distance de b à cette droite.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite intersection des deux plans d'équations respectives $x+y+z=0$ et $x-z=0$.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^6$ muni du produit scalaire usuel, on note $a=(1,-1,0,2,4,0)$ et

$$H=\{(x_1,\dots,x_6)\in\mathbb{R}^6 \mid x_1-2x_2+3x_3+x_4-3x_5-x_6=0\}.$$

Calculer la distance de a à H.

Exercice 10. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On se donne $v_1=(1,0,2), v_2=(2,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. On notera p_F la projection orthogonale sur F.

1. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,1,0)$.
3. Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ pour lesquelles la matrice de p_F est $\mathrm{Diag}(1,1,0)$.

Exercice 11. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, on considère $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur F ainsi que le symétrique orthogonal de J par rapport à F.
2. Calculer la distance de J à F.
3. En déduire $\inf\{2(1-a)^2+2(1+b^2)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 12. Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$< a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3, b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3 >= a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

On note H l'hyperplan suivant : $H=\{P\in E \mid P(1)=0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 13. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M,N\rangle=\sum_{i,j}m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont les coefficients de M et n_{ij} ceux de N.

1. Vérifier que pour $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M,N\rangle=\mathrm{tr}({}^tM\cdot N)$.
2. Soient $S\in\mathcal{S}$ et $A\in\mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS,{}^tA\rangle=\langle S,A\rangle$.
   En déduire que $\langle S,A\rangle=0$.
3. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S}=\mathcal{A}^\perp$.
4. On sait alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$.
   Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S\in\mathcal{S}$ et l'unique $A\in\mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M=S+A$.
5. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $M=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis la distance entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.

Exercice 14. Soient $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P,Q\in E$, on pose

$$< P,Q >=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Pour $Q\in E$, déterminer la distance de Q à $H=\left\{P\in E \mid \sum_{i=0}^{n}P(a_i)=0\right\}$.