Fiche 1

Exercice 1 (Formes bilinéaires) Soient a_{ij} des réels $(i, j = 1, 2)$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tous $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2.$$

(a) Montrez que φ est une forme bilinéaire.

(b) A quelle condition φ est-elle symétrique ?

(c) A quelle condition φ est-elle antisymétrique ?

(d) Donnez la matrice de φ dans la base canonique.

(e) On suppose φ symétrique. Quelle est la forme quadratique associée à φ ?

Soit maintenant n un entier > 0 et $a_{ij} \in \mathbb{R}$ des réels (pour $i, j = 1, \ldots, n$). On définit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tous $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j.$$

Reprenez les questions précédentes dans ce cadre plus général.

Corrigé

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et $\mathbf{y}' = (y_1', y_2')$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrons que φ est linéaire à droite. Comme $\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{y}' = (\lambda y_1 + \mu y_1', \lambda y_2 + \mu y_2')$, on trouve

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{y}') &= \alpha x_1(\lambda y_1 + \mu y_1') + \beta x_1(\lambda y_2 + \mu y_2') + \gamma x_2(\lambda y_1 + \mu y_1') + \delta x_2(\lambda y_2 + \mu y_2') \\
&= \lambda(\alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2) + \mu(\alpha x_1 y_1' + \beta x_1 y_2' + \gamma x_2 y_1' + \delta x_2 y_2') \\
&= \lambda \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}').
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à droite. Soit $\mathbf{x}' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$. Un calcul similaire donne

$$\varphi(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}),$$

donc φ est linéaire à gauche. Donc φ est bien une forme bilinéaire.

(b) φ est symétrique si pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ on a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Cela est équivalent à

$$\begin{aligned}
& a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 = a_{11} y_1 x_1 + a_{12} y_1 x_2 + a_{21} y_2 x_1 + a_{22} y_2 x_2 \\
\Leftrightarrow \quad & (a_{12} - a_{21}) x_1 y_2 + (a_{21} - a_{12}) x_2 y_1 = 0
\end{aligned}$$

pour tout $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. En choisissant par exemple $x_i = y_i = 1$ pour $i = 1, 2$ cela implique $2(a_{12} - a_{21})$, autrement dit $a_{12} = a_{21}$. Autre argument l'expression ci-dessus est un polynôme en 4 variables x_1, x_2, y_1, y_2 qui est nul, donc ses coefficients doivent être nuls...

(c) φ est antisymétrique si pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ on a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Cela est équivalent à

$$\begin{aligned}
& a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 = -\big(a_{11} y_1 x_1 + a_{12} y_1 x_2 + a_{21} y_2 x_1 + a_{22} y_2 x_2\big) \\
\Leftrightarrow \quad & 2a_{11} x_1 y_1 + 2a_{22} x_2 y_2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 y_2 + (a_{21} + a_{12}) x_2 y_1 = 0
\end{aligned}$$

pour tout $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Pour conclure on peut réutiliser l'argument sur les polynômes. Si on veut le faire à la main, en choisissant $x_1 = y_1 = 1$ et $x_2 = y_2 = 0$ on trouve $a_{11} = 0$. Puis en choisissant $x_1 = y_1 = 0$ et $x_2 = y_2 = 1$ on trouve $a_{22} = 0$. Enfin, en choisissant tous les coefficients égaux à 1 on trouve $a_{12} = -a_{21}$.

(d) La matrice de φ dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (en effet, $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = a_{11}$, $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = a_{12}$ etc.).

(e) Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. La forme quadratique associée à φ est définie par

$$q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

(car $a_{21} = a_{12}$).

Cas général (sans tous les détails).

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soient $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ et $\mathbf{y} = (y'_1, \dots, y'_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On a

$$\varphi(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{y}') = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_i(\lambda y_i + \mu y'_i) = \lambda \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_iy_i + \mu \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_iy'_i = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}'),$$

donc φ est linéaire à droite. Un calcul similaire montre que φ est linéaire à gauche.

(b) φ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i, j \in \{1, dots, n\}$.

(c) φ est antisymétrique si $a_{ii} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous i, j avec $1 \le i < j \le n$.

(d) La matrice de φ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(e) La forme quadratique associée à φ est donnée par la formule

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

(car $a_{ji} = a_{ij}$).

Exercice 2 (Formes quadratiques)

(a) On considère l'application $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 \end{array} \right.$. Trouver une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$.

(b) Même question que précédemment avec $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1x_2 \end{array} \right.$.

(c) Soit b_{11}, b_{12}, $b_{22} \in \mathbb{R}$ et soit q définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$q(\mathbf{x}) = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2.$$

Montrez que $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ et déterminez sa forme polaire. En déduire la matrice de q dans la base canonique.

(d) Plus généralement, soit $n > 0$ un entier et b_{ij} des réels $(1 \le i \le j \le n)$. Montrer que l'application q définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{1\le i\le j\le n} b_{ij}x_ix_j$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ (trouvez sa forme polaire). Déterminez la matrice de q dans la base canonique.

Corrigé

(a) On définit φ par $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1$ pour tous $\mathbf{x} = (x_1,x_2), \mathbf{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\varphi \in \mathrm{BLS}(\mathbb{R}^2)$ et $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, donc par définition de $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ on a bien $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$.

(b) On définit φ par $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \dfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$. Alors $\varphi \in \mathrm{BLS}(\mathbb{R}^2)$ et $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, donc par définition de $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ on a bien $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$.

(c) En utilisant la question précédente, il suffit de définir φ par

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = b_{11}x_1y_1 + \frac{b_{12}}{2}\big(x_1y_2 + x_2y_1\big) + b_{22}x_2y_2.$$

C'est une forme bilinéaire symétrique qui vérifie $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, donc $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$. C'est la forme polaire de q (par unicité de la forme bilinéaire symétrique vérifiant cette propriété). On en déduit que la matrice de q dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}/2 \\ b_{12}/2 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

(d) Plus généralement, soit $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ et $\mathbf{y} = (x_1,\ldots,x_n)$ dans $\mathbb{R}^2$. On définit la forme bilinéaire symétrique φ par

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{b_{ij}}{2}\big(x_iy_j + x_jy_i\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_iy_i + \sum_{1\le i<j\le n} \frac{b_{ij}}{2}\big(x_iy_j + x_jy_i\big).\end{aligned}$$

On a bien $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$, donc $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, sa forme polaire est φ et sa matrice dans la base canonique est la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & \dfrac{b_{ij}}{2} & \\ & & \ddots & & \\ & (*) & & & \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$