Fiche 1

Exercice 1 (Formes bilinéaires) Soient a_{ij} des réels ($i, j = 1, 2$) et soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tous $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2.$$

(a) Montrez que φ est une forme bilinéaire.

(b) A quelle condition φ est-elle symétrique ?

(c) A quelle condition φ est-elle antisymétrique ?

(d) Donnez la matrice de φ dans la base canonique.

(e) On suppose φ symétrique. Quelle est la forme quadratique associée à φ ?

Soit maintenant n un entier > 0 et $a_{ij} \in \mathbb{R}$ des réels (pour $i, j = 1, \ldots, n$). On définit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tous $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j.$$

Reprenez les questions précédentes dans ce cadre plus général.

Exercice 2 (Formes quadratiques)

(a) On considère l'application $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 \end{array} \right.$. Trouver une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$.

(b) Même question que précédemment avec $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2 \end{array} \right.$.

(c) Soit b_{11}, b_{12}, $b_{22} \in \mathbb{R}$ et soit q définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$q(\mathbf{x}) = b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2.$$

Montrez que $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ et déterminez sa forme polaire. En déduire la matrice de q dans la base canonique.

(d) Plus généralement, soit $n > 0$ un entier et b_{ij} des réels ($1 \leq i \leq j \leq n$). Montrer que l'application q définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{ij} x_i x_j$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ (trouvez sa forme polaire). Déterminez la matrice de q dans la base canonique.

Exercice 3 (Changement de base $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.) Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Pour deux vecteurs arbitraires $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire β par la formule $\beta(U, V) = aa' + 2ab' + 4a'b + 5bb'$. Soit $\mathcal{B}'$ une base formée de vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Expliciter M, la matrice de β dans la base canonique $\mathcal{B}$.

(b) Calculer la matrice de la forme β dans la base $\mathcal{B}'$ de deux façons différentes :
   1. en multipliant les vecteurs f_i et f_j pour tous $i, j \in \{1, 2\}$;
   2. en calculant la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$ et en utilisant la formule $M' = {}^tPMP$.
   3. Decomposer la matrice M en somme de la matrice symétrique et antisymétrique. Presenter la forme bilinéaire β comme la somme de la forme bilinéaire symétrique et de la forme bilinéaire anti-symétrique.

Exercice 4 (Changement de base $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.) Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique. Pour deux vecteurs arbitraires $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire φ par la formule $\varphi(v_1, v_2) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Soit M la matrice de la forme billinéaire φ dans la base canonique (expliciter !)

Soit B une base formée de vecteurs $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice de la forme φ dans cette base B de deux façons différentes :

(a) en multipliant les vecteurs h_i et h_j pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$;

(b) en calculant la matrice de passage C de la base canonique vers la base B et en utilisant la formule $M' = {}^tCMC$.

Exercice 5 (Matrice orthogonale) Soit E un espace réel de dimension fini n et $\mathcal{B}_e = \{e_i\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i\},\ i \in \{1, \cdots, n\}$ deux bases de cet espace. Soit C la matrice de passage de $\mathcal{B}_e$ vers $\mathcal{B}_f$.

(a) Soit A une matrice d'une appplication linéaire $\varphi :\ E \to E$ dans la base $\mathcal{B}_e$. Exprimer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_f$ en fonction de A et C. Notons la A'.

(b) On considère la forme bilinéaire $\beta : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par la même matrice A dans la base $\mathcal{B}_e$. Exprimer la matrice de β dans la base $\mathcal{B}_f$ en fonction de A et C. Notons la A''.

(c) On suppose que $C^{-1} = {}^tC$. Remarquer que alors on a $C \cdot {}^tC = I$, où I est la matrice d'identité. En plus pour une telle matrice de passage on a $A' = A''$. Soient $(c_{ij})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ - les entrées de la matrice C. On considère les vecteurs-colonnes de C : $v_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \cdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$.
   1. Montrer que :
      a. $c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \cdots + c_{ni}^2 = 1, \quad \forall\ i \in \{1, \cdots, n\}$,
      b. $c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots + c_{ni}c_{nj} = 0$, si $\ i \neq j$,
      c. $|c_{ij}| \leq 1, \quad \forall\ i, j \in \{1, \cdots, n\}$.
   2. Que peut-on dire sur l'ensemble de vecteurs $v_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$?
   3. Trouver les conditions similaires aux **a.** et **b.** sur les entrées des vecteurs $w_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \cdots \\ c_{in} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Produit scalaire : exemples élémentaires)

(a) Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?
   1. L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $xx' + yy' + xy' + yx'$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.

2. L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit E l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\beta(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

(b) Quelles sont les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que l'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta((x, y), (x', y')) = axx' + 2bxy' + 2bx'y + byy'$ soit un produit scalaire.

(c) On notera V les nombres complexes que l'on verra comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vérifier que $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque paire de nombres complexes (α, β) associe $\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$ est un produit scalaire.

Exercice 7 (D'autres exemples, orthogonalité) Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ? Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

(c) On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par

$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\mathrm{d}t.$$

Exercice 8 (Cauchy-Schwarz) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ on a

$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Préciser le cas d'égalité.
Indication : Identifier $\int_a^b |f(t)|dt$ à un produit scalaire entre deux fonctions bien choisies.

Exercice 9 (Cauchy-Schwarz) Soient A et B deux matrices $n \times n$ symétriques. En choisissant un produit scalaire sur l'espace des matrices $n \times n$ montrer que $(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\mathrm{tr}(A^2) \cdot \mathrm{tr}(B^2)$.

Exercice 10 (Caractérisation d'un produit scalaire)

(a) Soit $(E, \langle\, , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Montrer que $\|\ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(b) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on pose $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et $\varphi(x, x) = \|x\|^2$.

2. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x, y)$. Indication : démarrer avec $\|x+2y\|^2 + \|x\|^2$.
3. Montrer que pour tous $x, y, z \in E$, $\varphi(x+z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y)$.
4. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Montrer que ceci est encore vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.

(c) Montrer que la norme $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas associée à un produit scalaire.

Exercice 11 (Produit scalaire, bases) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de $a_1, \dots, a_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à $\mathbb{R}$ par un abus de notations.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.

(b) Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.

(c) Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (Familles indépendantes infinies) On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi n t)$.

(a) Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

(b) En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.