Fiche 5

Exercice 1. Endomorphisme adjoint. Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On note $v^* \in \mathbf{End}(E)$ l'unique endomorphisme de E tel que, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\langle v^*(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(v^*) = (\mathrm{Im}\ v)^\perp \text{ et } \mathrm{Im}(v^*) = (\mathrm{Ker}\ v)^\perp .$$

En déduire que $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v^*)$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme autoadjoint.
2. On remplace désormais le produit scalaire usuel par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   L'endomorphisme T est-il autoadjoint pour ce produit scalaire ? Si non, déterminer l'adjoint de T.

Exercice 3. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_1[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme de dérivation $\delta : P \in E \longmapsto P'$.

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.
2. En déduire que $\mathrm{rang}(u^* \circ u) = \mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}(u \circ u^*)$.
3. Comparer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u^* \circ u)$.

Exercice 5. Endomorphisme symétrique. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On rappelle que u est donc diagonalisable. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? En déduire que u est l'endomorphisme nul.

Exercice 6. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Démontrer les équivalences suivantes :

u est orthogonal $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

et

u est autoadjoint $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Exercice 7. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 8. On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 9. Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.

1. Montrer que $f(x) = x + k\langle x, a\rangle a$ définit un endomorphisme symétrique de E.
2. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 12. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u, comptées avec multiplicité. Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 13. Dire si les matrices A et B suivantes sont positives ou définies positives. Étudier dans un premier temps la question sans utiliser le critère de Sylvester.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner des conditions sur les réels r, s et t pour que la matrice C suivante soit symétrique définie positive.

$$C = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, on note $A \leq B$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Vérifier que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.