Fiche 4

Exercice 1. Soient a et b deux réels. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels a, $b \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Exercice 2. Soient a, b, c, d et e cinq réels. On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & a & b \\ c & d & e \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$ la matrice B est-elle orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B.

Exercice 3. On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 de norme 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.
   (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthornormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par
$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Rappeler pourquoi toute matrice de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est semblable (avec matrice de passage dans $O^+(\mathbb{R}^3)$) à une matrice de la forme
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
pour au moins un $\theta \in [0, 2\pi]$.
2. Dans cette question on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}R_\theta P$, et en déduire que toute matrice de de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est semblable (avec matrice de passage dans $O^+(\mathbb{R}^3)$) à une matrice de la forme R_θ pour au moins un $\theta \in [0, \pi]$.
3. Montrer que toute matrice de de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est semblable (avec matrice de passage dans $O^+(\mathbb{R}^3)$) à une et une seule matrice de la forme R_θ pour un $\theta \in [0, \pi]$, et que deux matrices de $O^+(\mathbb{R}^3)$ sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, du produit scalaire défini par :

$$\text{Pour tous } P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \qquad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini pour tous P par :

$$u(P) = P(-X).$$

Montrer que u est un endomorphisme orthogonal et préciser sa nature géométrique.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Pour $a \in E$ unitaire, on note v_a l'endomorphisme de E défini pour tout x de E par $v_a(x) = a \wedge x$, et p_a la projection orthogonale sur la droite de base a.

1. Quels sont les sous-espaces propres de v_a ? Quelle est son image ?
2. Décrire géométriquement l'application $p_a + v_a$.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et f un endomorphisme de E. L'objectif de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

$$(\text{pour tous } x, y \in E,\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)) \iff (f \text{ est une rotation ou l'application nulle}).$$

Dans l'exercice on note $[,,]$ le produit mixte.

1. Dans cette question, on suppose que f est une rotation de E.
   (a) Montrer que pour tous x, y et z de E :
   $$[f(x), f(y), f(z)] = [x, y, z].$$
   (b) Soit x, y et z de E. Montrer que :
   $$\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle = 0$$
   (c) Conclure.
2. Dans cette question, on suppose que pour tous x et y de E, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et que f n'est pas l'application nulle.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe de E. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est également une base orthonormée directe de E.
   (c) Conclure.